

分层流体中运动振荡质量源激发内波尾迹研究

王欣隆, 魏岗, 杜辉, 王少东

(国防科技大学 气象海洋学院, 南京, 211101, Email: wxl_90@foxmail.com)

摘要: 本研究采用一种等效移动振荡质量源来模拟有限深分层流体中运动物体的尾流效应, 结合内波本征值问题及 Fourier 变换等方法, 得到了计算有限深分层流体中移动振荡源生成内波垂向位移场和流场的表达式。此法适用于有限深度中的任意分层流体。利用该理论模型, 对两层密度分层流体和不同浮频率的线性分层流体进行了数值模拟。针对物体运动速度、分层强度、振荡频率对尾迹内波的波形、波幅的影响进行了分析, 发现除了运动速度外, 分层强度也会影响尾迹内波各模态的临界相速度, 从而影响了尾迹中横波的存在和散波的张角, 浮频率和振荡频率的增大均使尾迹内波的波幅随之线性增长, 这说明了分层环境中的密度梯度越大, 运动物体激发的内波波幅越大, 运动物体的振荡越强, 激发的内波也越强。而振荡频率的引入则解释了物体高速运动时横波系的存在和散波系的分离。

关键词: 内波; 尾迹; 分层流体; 质量源

1 引言

内波激发源的角度, 可以将分层流体中运动物体生成的内波分为两类: 第一种为体效应内波, 主要由运动物体排水体积的运动变化与背景密度分层流体相互作用产生的内波, 也称为 Kelvin 型内波; 第二种为尾迹效应内波, 主要由物体尾部的尾流与背景密度分层流体相互作用产生的内波, 也称为非 Kelvin 型内波。

尾迹效应生成的内波非常不稳定, 其激发源更为复杂。Milder^[1]提出的一个模型, 利用 Fourier 变换得到水平波数域上的内波控制方程, 结合上下刚性边界条件求解相应的内波本征值问题, 计算对应的 Green 函数, 通过卷积得到波数域上波高的表达式, 最后通过 Fourier 逆变换得到空间域上的波高场。Robey^[2]利用 Milder^[1]定常移动源模型, 将尾流等效为圆柱体模型, 结合实验得到的内波相关波速和尾流增长规律, 给出了尾流等效圆柱体移动速度、长度和直径的确定方法, 并与实验结果进行了比较, 内波波幅随拖曳速度变化规

律与实验吻合良好,但波形结构有些差异。Voison^[3]将其激发源等效为一个以一定频率振荡的点源,结果显示随机内波被限制在一个锥形体内。随后 Voison^[4]又给出了在时间和空间上周期分布的脉动点源的集合这一更加完整的理论模型。Gorodtsov 等^[5]提出了体源表示法,受其启发, Dupont 等^[6]改进了脉动点源集合,提出移动振荡球形源模型,模拟物体尾部周期性涡泄生成内波问题,与实验结果比较,在内波波系及波形方面,两者符合良好;但是该模型是在浮力频率为常数和无界条件下导出的,对于分层环境和边界适应性较差。Broutman 等^[7]基于实验观察结果,提出了湍流尾迹的移动脉冲源汇组合法。Voisin^[4]指出这种脉冲源汇在时间上是离散的周期性发生的,在空间上是相互交错排列的。梁川等^[8]受尾流周期性涡泄现象启发,提出移动脉动的点源方法,丰富了内波波系波系的表达,但并未对脉动频率的选择进行研究。尤云祥等^[9]指出,理论和数值的研究结果很难与实验完全吻合,在不同方面存在差异,这是由于尾迹激发源成分较为复杂,简化等效源模型只模拟了尾迹中的主要激发源。

本研究在尤云祥等^[9]提出的等效质量源方法和梁川等^[8]提出的移动脉动点源方法的基础上,考虑周期性涡泄激发的内波影响,建立了考虑振荡的等效质量源方法,并对振荡频率对内波波幅的影响作了初步研究,尝试建立起尾迹效应内波的振荡频率与物体运动速度之间的关系。

2 建模与求解

在理论处理上,对于有限尺度物体的 Kelvin 型内尾迹,通常采用移动源汇或偶极子来模拟其远场的运动,然而单纯的源汇或偶极子不能真实地反映出物体的体积效应,模拟结果与实际流场往往存在较大的误差。将一些源汇或偶极子进行适当的组合,使之成为一个体源,来模拟运动物体内波的激发源,这样处理不仅数值模型相对简单,而且物理模型更加直观。

对水下移动质量源的内波生成问题,由于它引起的水面位移很小,可以将水面视作一个刚性平面。在这种“刚盖假设”下,垂向速度方程为:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho_0 \Delta_h w \right] + \rho_0 N^2 \Delta_h w = \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial z} (\rho_0 Q) \quad (1)$$

$$w = 0 \quad (t = 0), w = 0 \quad (z = 0, H)$$

由于 $w = \partial \eta / \partial t$, 根据式 (1) 可以得到垂向位移方程:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \Delta_h \eta \right] + N^2 \Delta_h \eta = \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial z} \quad (2)$$

$$\eta = 0 \quad (z = 0, H)$$

设移动质量源为一个移动速度为 U 的细长回转体，对称轴中点的运动轨迹为 $y(t) = (Ut, 0, z_0)$ ，即移动质量源的对称轴中点位于水面下 $z = z_0$ 处，且移动方向与轴的正向相同。记 $r = f(\xi)$ 为细长回转体的表面方程， $2a$ 为细长回转体对称轴长度，那么可以表示为 Q ：

$$Q = \left[U \int_{-a}^a q(\xi) \delta(x - Ut - \xi) d\xi \right] \delta(y) \delta(z - z_0) \quad (3)$$

考虑频率为 ω_0 的移动振荡质量源 Q' 可以表示为：

$$Q' = \left[U \int_{-a}^a q(\xi) \delta(x - Ut - \xi) d\xi \right] \delta(y) \delta(z - z_0) e^{i\omega_0 t} = Q e^{i\omega_0 t} \quad (4)$$

可推导通过傅里叶变换和逆变换得到移动振荡质量源产生内波的垂向位移可以近似为

$$\tilde{\eta}(\bar{x}, y, z, t) = \frac{2\pi b^2 a i}{U} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(\omega_m a/U) / (\omega_m a/U) - \cos(\omega_m a/U)}{(\omega_m a/U)^2} \times \frac{e^{i(\omega_0 \pm \omega_m) \bar{x}/U}}{U - c_{gm} \frac{\omega_0 \pm \omega_m}{kU}} c_{pm}^3 k \phi_m(z) \phi'_m(z_0) e^{i\omega_0 t} \quad (5)$$

当 $\omega_0 = 0$ 时，式(5)退化为不考虑振荡的等效质量源生成内波的垂向位移，与尤^[9]的结果一致。

3 结果分析

密度分层的海水可以分成密度均匀的上混合层、厚度很薄的强跃层及密度随深度变化极微的下层，若将跃层简化为间断面，并忽略下层密度的微小变化，则可用两层流体分层模型来近似。当跃层厚度较大时，跃层内部流体密度一般随着深度加深而线性增大。本研究选取了两层分层流体和线性分层流体模型，对运动小球生成内波情况进行分析研究。图1为本文设置的分层环境的密度和浮频率剖面图。

图1中实线为与实际海洋分层环境的强跃层分布，两条虚线为以不同斜率增加的线性分层密度分布。针对强跃层分布，首先给出不同速度下第一模态和第二模态的内波等相线(图2)。图2中实线表示第一模态，虚线表示第二模态，当 $U < 4.5\text{cm/s}$ 时，第一和第二模态内波既有横波又有散波；当 $4.5\text{cm/s} < U < 20.1\text{cm/s}$ 时，第二模态内波横波消失，仅有散波且散波张角在 (t, y) 平面内几乎不变，但第一模态内波既有横波又有散波，并且散波张角随 U 增大而逐渐增大。当 $U > 20.1\text{cm/s}$ 时，第一模态内波横波消失，仅有散波且散波张角在 (t, y) 平面内几乎不变(当然在 (x, y) 空间平面内张角变小)。第二模态及高阶模态的横波和散波的变化规律类似，只是临界相速度随模态阶数增大而减小。由图2还可发现，当两

个模态均存在横波和散波时，低阶模态散波张角较小，分布在图形中间。随着速度增大，两个模态的散波张角均增大，低阶模态张角迅速增大并占据整个波形而成为主要波系。

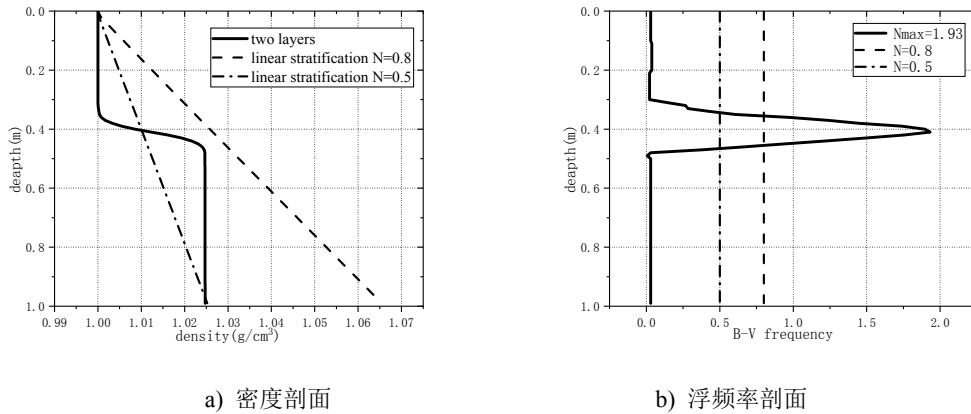


图 1 密度和浮频率剖面

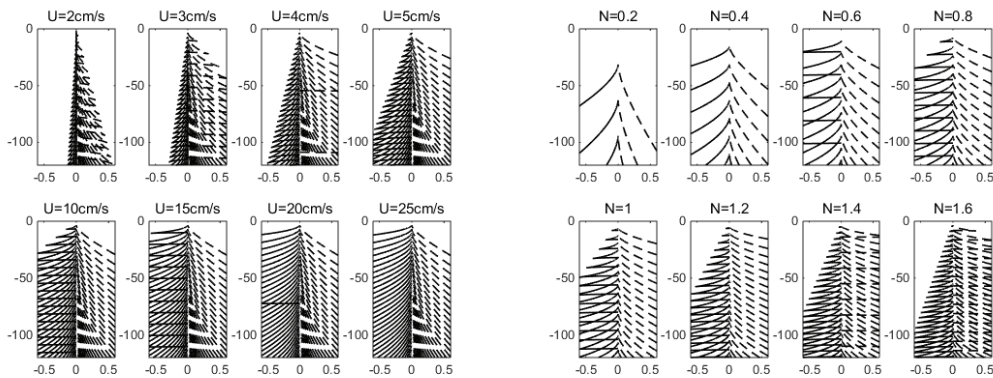


图 2 速度、浮频率对等相线的影响

如果在线性分层流体中，运动物体的速度保持不变，那么随着浮频率的增大，内波张角也逐步增大，并且 N 对模态波形结构的影响与速度相反。当 $N > 1.3$ 时，第一和第二模态内波既有横波又有散波；当 $0.5 < N < 1.3$ 时，第二模态内波横波消失，仅有散波且散波张角在 (t, y) 平面内几乎不变，但第一模态内波既有横波又有散波，并且散波张角随 N 增大而逐渐增大。当 $N < 0.5$ 时，第一模态内波横波消失，仅有散波且散波张角在 (t, y) 平面内几乎不变（当然在 (x, y) 空间平面内张角变小）。

图 3 显示了尾迹内波在不同振荡频率下的内波波形图，选取运动物体生成内波场中的一个定点，对不同浮频率下内波的最大波幅和平均波幅进行统计，得到的结果如图 4 所示。对于在线性分层环境 N 为常值时，随着 N 的增大，内波的最大波幅和平均波幅也随之线性增大，针对本文数值实验中振荡频率 ω_0 的影响，其作用与浮频率的影响类似，随着 ω_0 的

增大，内波的最大波幅和平均波幅也随之线性增大。

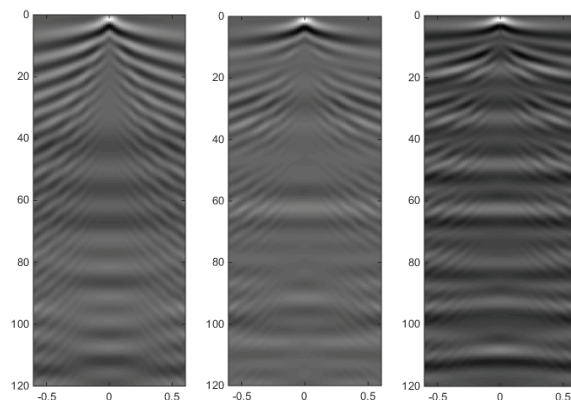


图3 不同振荡频率下的波形图 ($U = 20\text{cm/s}$, $\omega_0 = 0, 0.1, 0.2$)

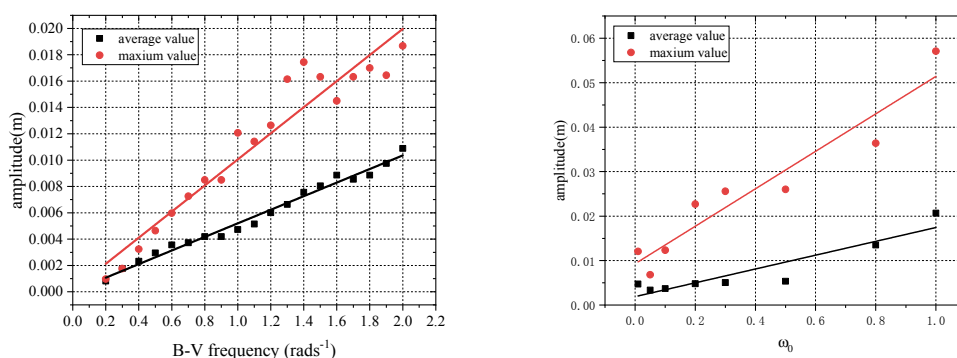


图4 浮频率、振荡频率对波幅的影响

梁川等^[8]对移动振荡点源的研究指出不同的振荡频率还可以导致横波以不同的频率出现，由于 ω_0 的引入，会使得原来对称的左右奇点发生偏移，即

$$(\omega_0 - k_x U)^2 - \omega_m^2 = 0 \Rightarrow \omega_0 - k_x U = \pm \omega_m \quad (6)$$

记 $(\omega_0 - k_x U) = -\omega_m$ 为左奇点， $(\omega_0 - k_x U) = \omega_m$ 为右奇点。通过分析发现：无论 U 多大，只要 $\omega_0 \neq 0$ ，总存在一个最小波数 k_{\min} ，使得在 $k \in (0, k_{\min})$ 范围内 k_y 为虚数，这说明一定存在横波系；由于 ω_0 的存在，使得左右奇点对应的最小波数 k_{\min} 不同，从而出现两个不同张角的散波系。

5 结论

针对目前运动物体尾流激发内波的研究状况,本研究采用一种振荡质量源方法来模拟分层流体中运动物体的尾流效应,得到了计算有限深分层流体中回转体生成内波垂向位移场和流场的表达式,针对不同速度、浮频率和振荡频率的尾迹内波进行了分析。

由于振荡频率的引入,解释了当运动物体的速度大于临界速度时,定常源计算将不出现横波,而实验在各个速度下都存在横波的现象;当拖曳速度较大时,会出现两个不同张角的散波系,而用移动振荡源方法计算得到的结果具有上述特点。分析发现,这是由于振荡频率的引入,当用留数定理求奇点积分时,会使原来对称的左右奇点发生偏移,从而导致横波的出现和散波系的分离。

针对不同速度和浮频率下数值求解获取的内波数据进行分析,结果发现随着除物体运动速度外,分层环境的强弱也可能影响横波的出现,从理论上讲主要是物体的运动速度和分层环境浮频率的大小影响了各个模态的内波临界相速度。浮频率和振荡频率的增大均使尾迹内波的波幅随之线性增长,这说明了分层环境中的密度梯度越大,运动物体激发的内波波幅越大,运动物体的振荡越强,激发的内波也越强。

参 考 文 献

- 1 Milder M. Internal waves radiated by a moving source. Vol. 1: Analytical simulation[J]. National Technical Information Service Document No. AD, 1974: 782-262.
- 2 Robey H F. The generation of internal waves by a towed sphere and its wake in a thermocline[J]. Physics of Fluids, 1997, 9(11): 3353-3367.
- 3 Voisin B. Internal wave generation by turbulent wakes[J]. Mixing in Geophysical Flows(ed Redondo J M & Métais O),1995: 291-301.
- 4 Voisin B, Ermanyuk E V, Flór J B. Internal wave generation by oscillation of a sphere,with application to internal tides[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2011, 666: 308-357.
- 5 Gorodtsov V A, Teodorovich E V. Study of internal waves in the case of rapid horizontal motion of cylinders and spheres[J]. Fluid Dynamics, 1982, 17(6): 893-898.
- 6 Dupont P, Voisin B. Internal waves generated by a translating and oscillating sphere[J]. Dynamics of Atmospheres and Oceans, 1996, 23(1-4): 289-298.
- 7 Broutman D, Rottman J W. A simplified Fourier method for computing the internal wavefield generated by an oscillating source in a horizontally moving, depth-dependent background[J]. Physics of Fluids, 2004, 16(10): 3682-3689.

- 8 梁川, 洪方文, 姚志崇,等. 有限深分层流体中运动物体尾流生成内波的一种移动脉动源方法[J]. 水动力学研究与进展, A 辑, 2015, 30(1):9-17.
- 9 尤云祥, 赵先奇, 陈科,等. 有限深密度分层流体中运动物体生成内波的一种等效质量源方法[J]. 物理学报, 2009, 58(10):6750-6760.

Internal wave patterns generated by a translating and pulsating mass source in a stratified fluid of finite depth

WANG Xin-long, WEI Gang, DU Hui, WANG Shao-dong

(College of Meteorology and Oceanography, National University of Defense Technology, Nanjing, 211101.

Email: wxl_90@foxmail.com)

Abstract: In this work, an equivalent translating and pulsating mass source is used to simulate the wake effect of moving objects in stratified fluids. A mathematical formula for the vertical displacement of the internal waves generated by such a source is derived using both the associated eigenvalue problem and the Fourier transform method. This method is applicable to any stratified fluid with a finite depth. This theoretical model was used to numerically simulate two layers of density-stratified fluids and linear-stratified fluids with different buoyant frequencies. In addition to the velocity of the moving object, both the stratification intensity and the pulsating frequency influence the waveform, amplitude and flow field of the internal wave. The velocity and the stratification intensity were found to affect the critical phase velocity of each mode of the internal waves, thus affecting the existence of the transverse wave and the opening angle of the divergent waves. The increase in the buoyant frequency and the pulsation frequency linearly increase the amplitude of the wave, indicating that the increase in the density gradient leads to an increase in the amplitude, stronger pulsation of the moving object and greater internal wave excitation. The introduction of the pulsating frequency accounts for both the existence of the transverse waves and the separation of the divergent waves.

Key words: internal wave; wake; stratified fluid; pulsating mass source;