

基于双层 Boussinesq 模型的波浪演化

刘忠波^{1*}, 房克照², 孙家文³

(1. 大连海事大学交通运输工程学院, 大连 116026, Email: liuzhongbo@dlmu.edu.cn; 2. 大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 大连, 116023; 3. 国家海洋环境监测中心海域管理技术重点实验室, 大连 116024)

摘要: 针对 Liu 和 Fang^[1]推导的双层 Boussinesq 水波方程, 在非交错规则均匀网格下, 建立了基于混合四阶 Adams-Bashforth-Moulton 格式时间步进的立面二维有限差分模型。首先, 数值模拟了常水深线性波、非线性波浪的传播变形, 通过将数值解与解析解比较来检验模型在色散性、变浅性、非线性以及速度剖面的精准性, 结果表明, 数值模型具有良好的线性与非线性特征。其次, 数值模拟了常水深聚焦波群传播变形, 计算结果与实验数据的吻合程度较好。最后, 设计了一组从深水到波浪破碎前水深的波浪演化实验, 并讨论了方程中非线性对数值结果的影响。

关键词: 双层 Boussinesq 数值模型; 色散性; 非线性; 变浅性

1 引言

当波浪从深水传到浅水, 其经历了多种复杂的变浅、折射、绕射和反射甚至波浪破碎等物理现象, 对波浪精确模拟一直是国内外学者关注的话题。近年来, 伴随计算机性能的提升和新型水波方程的出现, 精准相位捕捉成为可能。作为一类相位识别模型, Boussinesq 型 (BT) 模型得到了较广泛的关注和应用, 最新研究表明, BT 模型的适用水深大大拓展^[1], 已完全摆脱了经典 BT 方程不能适用深水这一限制。

BT 数值模型能否精确捕捉非破碎波浪, 主要看其理论方程是否具有精确线性与非线性性能。大多数 BT 方程将垂向速度用低阶的水平速度表达, 它们的非线性适用水深远小于其线性色散适用水深。强色散的非线性 BT 方程中一般均含有垂直速度^[1-3], 它们适用水深大大加深, 最新方程色散适用水深 kh 可达 7600^[1]。最近, Liu 和 Fang 开发了一组垂向二维 BT 波浪数值模型^[4], 通过数值研究初步验证数值模型的有效性。本文则进一步对该数值模型进行了更为广泛的验证。在此基础上, 设计了从深水到波浪破碎前水深的波浪演化实验, 并讨论了波浪非线性对计算结果的影响。

2 垂向二维双层 Boussinesq 水波模型

2.1 控制方程

Liu 和 Fang 推导的双层 BT 方程^[3], 在垂向二维情况下模型包含 9 个方程。自由波面处满足运动学边界条件和动力学边界条件:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w_\eta - u_\eta \eta_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_\eta}{\partial t} = -g\eta_x - \frac{1}{2}(u_\eta^2 + 2u_\eta w_\eta \eta_x)_x - \eta_x \frac{\partial w_\eta}{\partial t} + w_\eta (u_\eta \eta_x)_x \quad (2)$$

自由波面处的速度与静止水位处速度的关系式为

$$u_\eta = u_{10} + \eta w_{10x} - \frac{1}{2}\eta^2 u_{10xx} - \frac{1}{6}\eta^3 w_{10xxx} \quad (3)$$

$$w_\eta = w_{10} - \eta u_{10x} - \frac{1}{2}\eta^2 w_{10xx} + \frac{1}{6}\eta^3 u_{10xxx} \quad (4)$$

静止水位处速度与第一层计算速度的关系式为

$$u_{10} = u_1^* - \sigma_1 u_{1xx}^* + \sigma_2 w_{1x}^* - \sigma_3 w_{1xxx}^* - \sigma_4 u_{1x}^* + \sigma_5 u_{1xxx}^* - \sigma_6 w_{1xx}^* \quad (5)$$

$$w_{10} = w_1^* - \sigma_1 w_{1xx}^* - \sigma_2 u_{1x}^* + \sigma_3 u_{1xxx}^* - \sigma_4 w_{1x}^* + \sigma_5 w_{1xxx}^* + \sigma_6 u_{1xx}^* \quad (6)$$

连接位置处, 第一层计算速度与第二层计算速度关系式为

$$u_2^* - \sigma_7 u_{2xx}^* + \sigma_8 w_{2x}^* - \sigma_9 w_{2xxx}^* - \sigma_{10} u_{2x}^* + \sigma_{11} u_{2xxx}^* (1 - c_1) - \sigma_{12} (1 - \frac{1}{4}c_1) w_{2xx}^* \quad (7)$$

$$= u_1^* - \sigma_1 u_{1xx}^* - \sigma_2 w_{1x}^* + \sigma_3 w_{1xxx}^* + \sigma_4 u_{1x}^* - 3\sigma_5 u_{1xxx}^* - \frac{3}{2}\sigma_6 w_{1xx}^* \quad (8)$$

$$w_2^* - \sigma_7 w_{2xx}^* - \sigma_8 u_{2x}^* + \sigma_9 u_{2xxx}^* - \sigma_{10} w_{2x}^* + \sigma_{11} (1 - c_1) w_{2xxx}^* + \sigma_{12} (1 - \frac{1}{4}c_1) u_{2xx}^* \\ = w_1^* - \sigma_1 w_{1xx}^* + \sigma_2 u_{1x}^* - \sigma_3 u_{1xxx}^* + \sigma_4 w_{1x}^* - 3\beta_{13} \sigma_5 w_{1xxx}^* + \frac{3}{2}\beta_{12} \sigma_6 u_{1xx}^*$$

水底满足的运动学条件为

$$w_2^* - \sigma_7 w_{2xx}^* + \sigma_8 u_{2x}^* - \sigma_9 u_{2xxx}^* + \sigma_{10} w_{2x}^* - 3\beta_{23} \sigma_{11} (1 + \frac{1}{3}c_1) w_{2xxx}^* \quad (9)$$

$$+ \frac{3}{2}\beta_{22} \sigma_{12} (1 + \frac{1}{6}c_1) u_{2xx}^* + h_x (u_2^* - \sigma_7 u_{2xx}^* - \sigma_8 w_{2x}^* + \sigma_9 w_{2xxx}^*) = 0$$

$$\sigma_2 = \alpha_1 h, \quad \sigma_8 = \alpha_2 h, \quad \sigma_1 = \frac{2}{5}\sigma_2^2, \quad \sigma_7 = \frac{2}{5}\sigma_8^2, \quad \sigma_3 = \frac{1}{15}\sigma_2^3, \quad \sigma_9 = \frac{1}{15}\sigma_8^3, \quad \sigma_4 = \alpha_1^2 h h_x, \quad (10)$$

$$\sigma_5 = \frac{1}{5}\alpha_1^4 h^3 h_x, \quad \sigma_6 = \frac{4}{5}\alpha_1^3 h^2 h_x, \quad \sigma_{10} = (2\alpha_1 + \alpha_2) \sigma_8 h_x, \quad \sigma_{11} = \frac{1}{5}\sigma_8^2 \sigma_{10}, \quad \sigma_{12} = \frac{4}{5}\sigma_8 \sigma_{10}.$$

式中, η 为波面; u_η 和 w_η 为自由表面处的水平和垂向速度; u_{10} 和 w_{10} 为在静止水位处的速度分量; (u_i^*, w_i^*) ($i=1, 2$) 与每层中间位置处速度对应的计算速度; 下标 x 表示对 x 求导; g 是重力加速度, 系数取值为 $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{22}, \beta_{23}) = (0.1053, 0.3947, 0.92, 0.85, 0.937, 0.607)$ 。

2.2 数值计算流程、造波与消波

时间步进格式采用混合四阶预测-校正的 Adams-Bashforth-Moulton 格式, 在预报阶段, 利用三阶 Adams-Bashforth 格式求解方程 (1) 和方程 (2), 可以得到波面和波面处水平速

度的预报值；求解方程 (3)、方程 (5)、方程 (7) 得到水平速度 u_0 、 u_1^* 和 u_2^* 的预报值；进一步求解方程 (9)、方程 (8)、方程 (6)、方程 (4) 可得到垂向速度 w_2^* 、 w_1^* 、 w_0 和 w_7 的预报值。校正阶段则利用四阶 Adams-Moulton 格式求解方程 (1) 和方程 (2) 得到波面和波面处水平速度的校正值，其他过程类似。当所有变量校正值与预报值在设定误差 0.0001 内，则进入下一时间，否则更新校正值后重新校正过程。空间导数差分采用与 Liu 和 Fang 类似的数值格式^[4]，这里不再赘述。

造波条件根据计算工况，可采用内部造波方法^[5]、边界松弛造波方法^[6]和传统边界造波法。采用内波造波采用两个海绵层消波，边界造波时采用一个海绵层消波。

3 数值验证和应用

3.1 线性色散性的检验

一组波群包含 141 个规则波，波高均为 0.1m，波浪周期范围为 6~20s，间隔为 0.1s。水槽长 4200 m，水深 156.13 m，水深范围为 $kh \approx 1.68 \sim 17.45$ 。计算中采用线性边界造波，时间步长和空间步长为 0.2s 和 3.0m。在末端设置 1200 m 长的海绵层，并忽略底部摩擦影响。图 1 给出了在 $t=4800$ s 时计算波面和线性 Stokes 波解析解的对比，二者吻合程度很好，印证了双层 BT 模型在模拟线性波群时具有较好的色散性能。

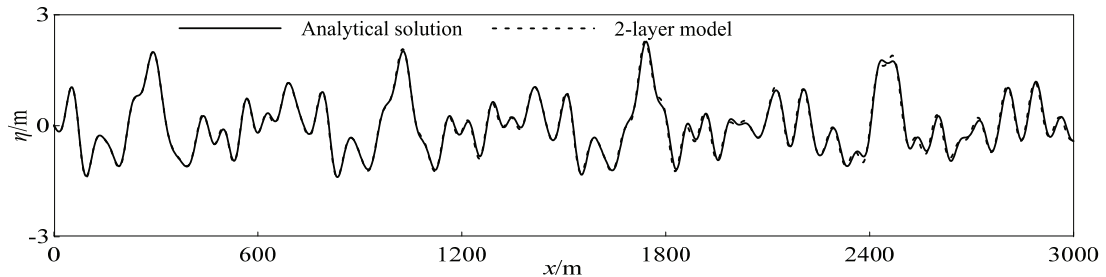


图 1 数值计算波面与波面解析解的比较

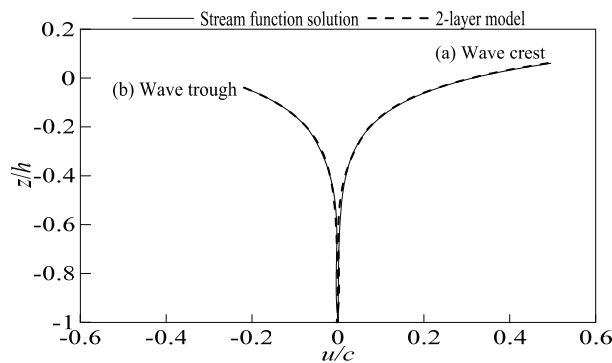


图 2 波峰和波谷处水平速度剖面与流函数解析解的比较

3.2 非线性波浪速度剖面的检验

数值实验中采用边界松弛造波，计算域长为 $10L$ (L 为非线性波长)，松弛造波区（覆盖 $0\sim 2L$ ）和海绵层（覆盖 $8\sim 10L$ ）分别施加在入射边界和右端边界。模拟了在 70 m 恒定水深上周期 $T=6.0\text{ s}$ ，波高 $H=7.0\text{ m}$ 的强波浪传播，水深 $kh=6.94$ ，波浪陡度 $H/L=0.11$ 。计算时间为 $50T$ ，空间大小为 $L/32$ ，时间步长为 $T/120$ 。图 2 给出了在 $x/L=4$ 处波峰和波谷时水平速度剖面与流函数解析解对比，二者吻合良好，这说明方程的非线性及速度剖面都很精确。

3.3 线性变浅的检验

线性波周期 $T=6.4\text{ s}$ ，深水时方程中的下层速度均接近 0，为了减少计算量，本文设置两个算例，其中算例 1，深水 $h_1=30\text{ m}$ ($kh=2.95$) 到浅水 $h_2=1\text{ m}$ ($kh=0.31$)；算例 2，则是 $h_1=300\text{ m}$ ($kh=29.5$) 到 $h_2=30\text{ m}$ ($kh=2.95$)，任何一个算例连接水深均采用：

$$h(x) = h_1 - \frac{h_1 - h_2}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{\sin(\pi x / 3180)}{1 - (2x / 3180)^2} \right) \right] \quad (11)$$

数值模拟中时间步长采用 0.05 s ，两个算例空间步长分别采用 0.5 m 和 3 m ，计算时间为 $200T$ 。图 3 给出了计算波面与变浅波幅轮廓线的对比，整体来看，数值计算比较稳定，且波面轮廓与控制轮廓线吻合程度良好，这说明方程具有良好的线性变浅性能。

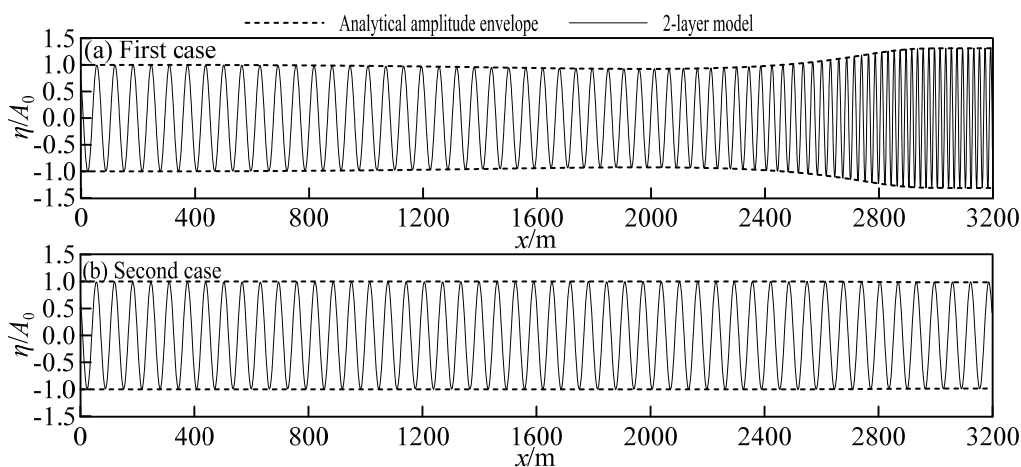


图3 计算波面与变浅波幅轮廓线的对比

3.4 聚焦波的传播模拟

对 Baldock 等^[8]实验中的 B55 算例进行模拟，B55 由 $N=29$ 个具有相等波幅的波分量组成，覆盖 $0.714\text{ Hz} < f < 1.667\text{ Hz}$ 的范围。数值水槽长 20 m ，在 $x=0\text{ m}$ 处施加线性边界入射，并且在计算域末端施加 5 m 长的海绵层，空间和时间步长分别为 0.05 m 和 0.01 s 。图 4 给出了计算波群波面与实验结果的比较，二者吻合良好，这反映出方程具有良好的非线性性能和非线性色散性能。

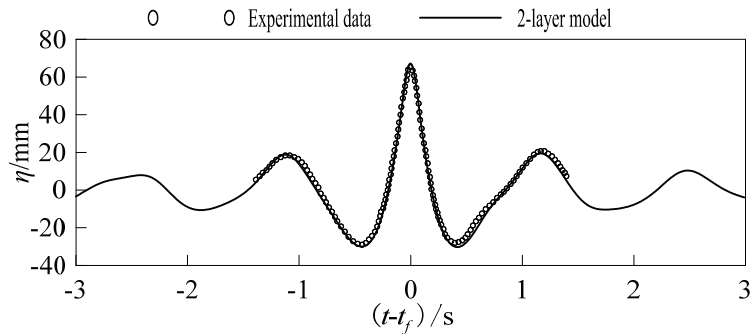


图4 计算波群波面与实验结果的对比

3.5 数值应用

地形为 1:10 的斜坡连接两个常水深 h_1 和 h_2 ($h_1=28.2\text{m}$, $h_2=5\text{m}$), 波周期 $T=6.0\text{s}$, 波高为 1m, 2m 和 2.5m。模拟采用空间步长 2.0m, 时间步长为 0.2s。在 $t=400\text{s}$ 时计算波面和波面处水平速度见图 5。随着非线性增强, 波峰尖锐, 波峰和波谷出现明显不对称, 波长也随着非线性在变长, 这是波幅离散频散效应引起的。

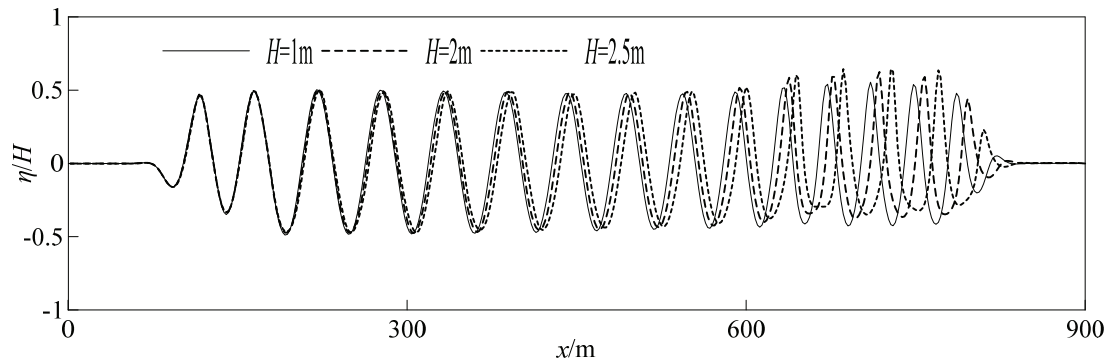


图5 不同非线性情况下数值模拟的波面对比

4 结论

在均匀网格上采用混合四阶 Adams-Bashforth-Moulton 格式步进求解垂直二维双层 BT 模型, 并开展了数值模拟研究, 得到主要结论如下。

(1) 数值模拟了含有 141 个频率的线性波群算例, 充分证实了计算模型色散性能的精准, 也印证了精确捕捉波浪相位需要方程应具备良好的线性色散精度的事实。

(2) 数值模拟了深水非线性波浪传播, 其计算水平速度沿着水深分布的剖面具有较高精度, 表明出双层 BT 方程不仅具有精确线性速度剖面^[3], 也具有较精确的非线性速度剖面。

(3) 浅水变形算例证实方程具备良好的线性变浅性能, 聚焦波模拟则反应了计算模型具有良好的线性与非线性性能。

总之, 双层 BT 数值模型的计算结果与相关解析解吻合程度均很好, 一方面采用格式求

解数值模型是合理的；另一方面从数值角度印证双层BT方程具备良好的理论精度。

致谢

国家自然科学基金项目(编号51779022, 51579034, 51809053)资助, 特此说明。

参 考 文 献

- 1 Liu ZB, Fang KZ, Cheng YZ. A new multi-layer irrotational Boussinesq-type model for highly dispersive surface waves over a mildly sloping seabed. *J. Fluid Mech.*, 2018, 842: 323-353.
- 2 Madsen P A, Bingham H B, Liu H. A new Boussinesq method for fully nonlinear waves from shallow to deep water. *J. Fluid Mech.* 2002, 462: 1-30.
- 3 Liu Zhongbo, Fang Kezhao. A new two-layer Boussinesq model for coastal waves from deep to shallow water: Derivation and Analysis. *Wave Motion*, 2016, 67: 1-14.
- 4 Liu Zhongbo, Fang Kezhao. Numerical verification of a two-layer Boussinesq-type model for surface gravity wave evolution. *Wave Motion*, 2019, 85: 98-113.
- 5 Fuhrman D R. Numerical solutions of Boussinesq equations for fully nonlinear and extremely dispersive water waves. Ph.D. thesis, Technical University of Denmark, Denmark, 2004.
- 6 Hsiao S C, Lynett P, Hwung H H, Liu P L-F. Numerical simulations of nonlinear short waves using a multilayer model. *J. Eng. Mech.*, 2005, 131: 231-243.
- 7 Baldock T E, Swan C, Taylor P H. A laboratory study of nonlinear surface waves on water. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 1996, 354:649-676.

Numerical simulation of wave evolution by a two-layer Boussinesq-type model

LIU Zhong-bo¹, FANG Ke-zhao², SUN Jia-wen³

(1Transportation Engineering College, Dalian Maritime University, Dalian, 116026, China, Email:

liuzhongbo@dlnu.edu.cn; 2 State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of

Technology Dalian, 116024; 3 National Marine Environmental Monitoring Center, Dalian, 116024, China)

Abstract: Based on the two-layer Boussinesq-type model derived by Liu and Fang (2016), a vertical two-dimensional model is established and solved by a finite difference method. In this model, a compose fourth-order Adams-Bashforth-Moulton scheme is used for time integration on non-staggered regular uniform grids. Firstly, the numerical simulations of linear and nonlinear waves on a constant water depth and a slowly varying bottom are carried out. The accuracy of the dispersion, shoaling gradient, nonlinearity and velocity profile is verified by comparing the numerical solutions with the corresponding analytical solutions. The results show that the numerical model has good linear and nonlinear characteristics. Secondly, numerical simulation of a focused wave group evolution on a constant water depth is conducted, the simulated results agree well with the experimental data. Finally, the numerical experiments of wave evolution from deep water to a finite water depth where waves do not break are conducted, and the effect of wave nonlinearity to the results is discussed.

Key words: A two-layer Boussinesq numerical model; dispersion; nonlinearity; shoaling amplitude