

# 双点涡生成界面内波的非线性相互作用

刘迪, 王振

(大连理工大学 数学科学学院 辽宁大连 116024)

**摘要:** 本文考察了二维两层稳定流中对称/反对称涡对相互作用对界面波的影响, 其中涡对位于无限深的下层流体中。基于势流理论和边界积分方程法建立关于界面波的积分-微分方程组, 并基于拟牛顿法进行数值计算。讨论模型中两点涡间距离变化对界面波的影响, 发现下游稳定波的波高周期性变化, 周期大约为仅存在上游单个点涡时的下游稳定波的波长, 周期性变化的最值约为两个点涡分别引起的下游稳定波的振幅的叠加。最大波峰最多是单点涡情形的 1.742 倍且随着距离增加而减小。分别改变双点涡中单个的强度, 其最大波峰相比于两个点涡的和, 均整体降低, 但其变化规律不同。

**关键词:** 分层流; 涡对; 边界积分方程; 积分-微分方程; 非线性界面波

## 1 引言

自然存在的流动总是伴随着不同密度的流体, 如温水和冷水、淡水和盐水。对稳定密度分层海水, 在外界扰动下会产生内波。由于海水的垂直密度梯度通常非常小, 不同于表面波内波的振幅可能非常大<sup>[1]</sup>。密度不同两层流体的界面内波经常作为内波的简化模型。已有很多学者对两层流体中不同扰动源产生的内波进行了研究, 包括底地形<sup>[2]</sup>、水翼<sup>[3]</sup>、运动点源<sup>[4-5]</sup>和偶极子<sup>[6]</sup>的点涡<sup>[7-8]</sup>。

基于势流理论, 研究界面内波问题可以归结为求解界面形状未知的拉普拉斯方程组。Forbes<sup>[9]</sup>在研究二维理想无旋流体中运动点涡<sup>[9]</sup>产生的表面波时, 利用自然参数描述自由表面, 用边界积分方程法建立描述问题的积分-微分方程, 求得数值解。Belward<sup>[2]</sup>和王振等<sup>[7-8]</sup>把这种方法应用于任意底地形和上下层中的点涡所产生的界面内波的研究中。

本文利用势流理论和边界积分方程法讨论下层中存在两个点涡所产生的二维稳定两层流的界面波, 上下层流体均是理想流体且流动是无旋的, 流向一致。假定上层密度低于下层密度, 且具有不同的流速。上层有限深且满足刚盖假定, 下层为无限深。类似于文献[7-8]建立积分-微分方程组, 并通过拟牛顿法进行数值计算。讨论模型中两点涡间距离变化对界面波的影响, 改变点涡强度比较结果。

## 2 建立边界积分方程

将分层流体简化为具有不同密度的稳定两层理想流体, 上下层流速不同、流向一致,

且流动是无旋的。建立笛卡尔直角坐标系， $x$ 轴置于未扰动的水平分界面，方向与上游无穷远流流向一致， $y$ 轴竖直向上。上层流体深度为 $T$ 且上表面满足刚盖假定。下层流体无限深，其中存在一对关于 $y$ 轴对称的点涡，两个点涡间的距离是 $2D$ ，与 $x$ 轴距离均为 $H$ ，涡强度分别为 $K_1$ 和 $K_2$ 。本文以后分别用下标1和2来表示与上层流体和下层流体有关的物理量。两层流体的密度分别是 $\rho_1$ 、 $\rho_2$ ，上游无穷远速度分别是 $c_1$ 、 $c_2$ 。

以 $c_2$ 为速度尺度，以 $H$ 为长度尺度，对上面的物理量进行无量纲化，并引入如下无量纲量：

$$F = \frac{c_2}{\sqrt{gH}}, \varepsilon_1 = \frac{K_1}{c_2 H}, \varepsilon_2 = \frac{K_2}{c_2 H}, \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, c = \frac{c_1}{c_2}, \lambda = \frac{T}{H}, d = \frac{D}{H}$$

其中， $F$ 是Froude数； $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$ 分别是两个点涡的无量纲强度； $\rho$ 是上下层密度比； $c$ 是上下层的上游无穷远流速比； $\lambda$ 是上层的无量纲深度； $d$ 是涡对到 $y$ 轴的距离。流体界面用函数 $y = \eta(x)$ 描述。图1是无量纲示意图。

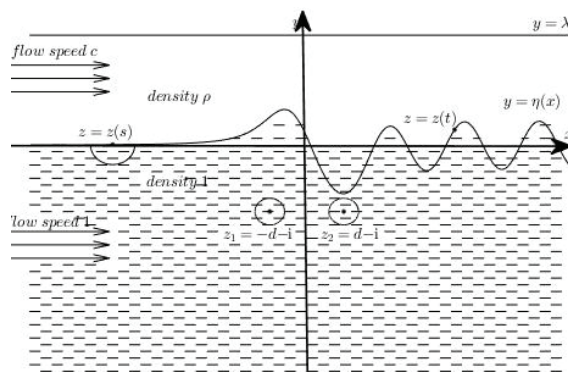


图1 双点涡生成界面内波的无量纲示意图

引入解析函数 $f_j(z) = \phi_j(x, y) + i\psi_j(x, y)$ ,  $j=1, 2$ ,  $z = x + iy$ ，其中 $\phi_j(x, y)$ ,  $\psi_j(x, y)$ 分别是第 $j$ 层流体的势函数和流函数。在两个点涡处 $f_2$ 满足

$$f_2 \rightarrow z + \frac{i\varepsilon_1}{2\pi} \ln(z-z_1) + \frac{i\varepsilon_2}{2\pi} \ln(z-z_2), z \rightarrow z_1, z_2 \quad (1)$$

上下层流体的无穷远条件

$$f_1 \rightarrow cz, f_2 \rightarrow z, \text{Re}[z] \rightarrow -\infty \quad (2)$$

上层刚性表面满足边界条件

$$\nabla\phi_1 \cdot \vec{n} = 0, y = \lambda \quad (3)$$

用自然参数描述界面： $(x, \eta(x)) = (x(s), y(s))$ ，且满足弧长公式：

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \quad (4)$$

上下层满足伯努利方程，且界面上处处压强相等，由此得：

$$\rho \left( \frac{d\phi_1}{ds} \right)^2 - \left( \frac{d\phi_2}{ds} \right)^2 + \frac{2(\rho-1)y}{F^2} = \rho c^2 - 1 \quad (5)$$

对于上层流体, 考虑  $G_1 = \frac{df_1}{dz} - c$ , 利用柯西积分公式  $\oint_{\Gamma_1} \frac{G_1(\xi)}{\xi - z(s)} d\xi = 0$ , 建立方程

$$\pi(x'(s)\phi_1'(s) - c) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c(z(t) - z(s)) \times dz(t) + (y(t) - y(s)) d\phi(t)}{|z(t) - z(s)|^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c(\tilde{z}(t) - z(s)) \times dz(t) + (\tilde{y}(t) - y(s)) d\phi(t)}{|\tilde{z}(t) - z(s)|^2} \quad (6)$$

针对下层流体, 考虑  $G_2 = \frac{df_2}{dz} - 1$ , 由留数定理有  $\oint_{\Gamma_2} \frac{G_2(\xi)}{\xi - z(s)} d\xi = \sum_{k=1,2} \text{Res}\left\{ \frac{G_2(\xi)}{\xi - z(s)}, z_k \right\}$ , 利用相应边界条件计算并取虚部, 得:

$$\pi(x'(s)\phi_2'(s) - 1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(z(t) - z(s)) \times dz(t) + (y(t) - y(s)) d\phi(t)}{|z(t) - z(s)|^2} + \frac{\varepsilon_1(y(s) + 1)}{|z(s) - (-d - i)|^2} + \frac{\varepsilon_2(y(s) + 1)}{|z(s) - (d - i)|^2} \quad (7)$$

其中  $\tilde{z}(t) = x(t) + i(2\lambda - y(t))$ ,  $\tilde{y}(t) = 2\lambda - y(t)$ 。具体推导过程与文献[7-8]类似。

最后得到控制方程(4)至方程(7)。根据远场条件(2)进行数值求解。

### 3 数值计算

数值求解过程类似文献[3,7-8], 取  $y'(s)$  的近似值, 计算其他未知量并利用拟牛顿法更新  $y'(s)$  的近似值。用有限区间  $[s_1, s_N]$  截断整个积分区域并  $N-1$  等分得到  $N$  个格点

$s_k = s_1 + (k-1)\Delta s, \Delta s = (s_N - s_1)/(N-1), k=1, \dots, N$ 。用  $x_k, y_k, \phi'_{1,k}, \phi'_{2,k}$  表示相应未知量在格点  $s_k$  的近似值。为了处理积分中的奇异性, 引入半格点

$s_{k-1/2} = (s_{k-1} + s_k)/2, k=2, \dots, N$ 。  $x(s)$  在  $s_{k-1/2}$  的近似值为  $x_{k-1/2} = (x_{k-1} + x_k)/2$ , 其他量类似处理。  $s_1$  点则应用无穷远条件且由弧长公式和伯努利方程(5)有

$$y'_1 = y_1 = 0, x'_1 = 1, x_1 = s_1, \phi'_1 = c, \phi'_2 = 1$$

取初始近似  $y_k = 0, k=2, \dots, N$ , 利用弧长公式(4)和梯形公式可以求出  $x'_k, x_k, y_k, k=2, \dots, N$ 。利用梯形公式计算, 把式(6)中的积分用在  $[s_1, s_N]$  上的数值积分近似, 得到关于  $[\phi'_{1,2}, \dots, \phi'_{1,N}]^T$  的线性方程组  $A_1[\phi'_{1,2}, \dots, \phi'_{1,N}]^T = b_1$ 。解得  $[\phi'_{1,2}, \dots, \phi'_{1,N}]^T = A_1^{-1}b_1$ , 再由式(5)计算  $[\phi'_{2,2}, \dots, \phi'_{2,N}]^T$ 。

同样利用梯形公式计算式(7)在  $[s_1, s_N]$  上的数值积分, 整理成矩阵形式

$$A_2[\phi'_{2,2}, \dots, \phi'_{2,N}]^T - b_2 \triangleq E[y'_2, \dots, y'_N]$$

最后应用拟牛顿法<sup>[10]</sup>更新  $y'_2, \dots, y'_N$ :

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i - B_i^{-1} E[u_i] \\ B_{i+1} = B_i + (f_i - B_i v_i) v_i^T / (v_i^T v_i) \\ v_i = u_{i+1} - u_i, f_i = E[u_{i+1}] - E[u_i] \end{cases}, i = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

其中  $u = (y'_2, \dots, y'_N)$ ,  $u_i$  表示第  $i$  次迭代的近似值。  $B_i$  是第  $i$  次迭代中雅可比阵的近似, 初始阵  $B_0 = ((E(h e_1) - E(0, \dots, 0)) / h, \dots, (E(h e_{N-1}) - E(0, \dots, 0)) / h)$ ,  $e_i$  表示第  $i$  个  $N-1$  维单位向量。迭代过程直至  $\|E\|_2 < \sigma$  ( $\sigma > 0$  事先给定的充分小正数) 停止。

#### 4 结果分析

假定上下层流速相同, 即  $c = 1$ 。计算区域  $[-25, 30]$ ,  $N = 2201$ ,  $F = 0.13$ ,  $\rho = 0.9$ 。对于对称点涡对  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -0.23$ , 上游稳定来流遭遇点涡对首先产生一个非常大的波峰, 随后出现的

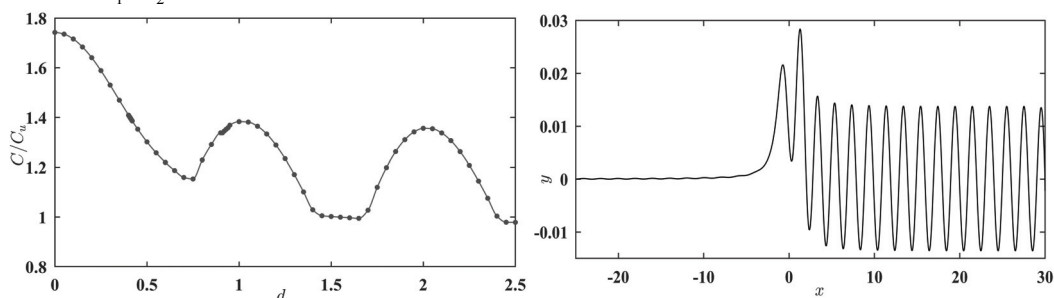


图2 (a)  $C/C_u$  随着  $d$  增加的变化规律 (b)  $d = 1.03$  时的界面波形

下游稳定波振幅小于这个波峰的幅度。记点涡对生成波形的最大波峰为  $C$ , 仅在  $(-d, -1)$  存在单个点涡  $\varepsilon = -0.23$  时对应界面波的最大波峰为  $C_u$ 。如图 2 (a) 所示, 当  $d$  从 0 逐渐增大时,  $C/C_u$  从 1.742 逐渐下降。当  $d > 0.5$ , 最大峰的下游附近出现一个波峰且振幅逐渐

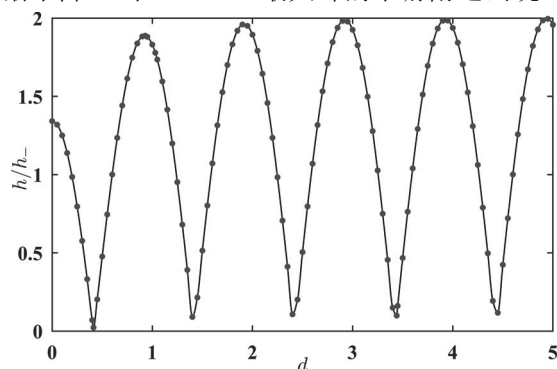


图3 下游稳定波高随  $d$  增加呈周期性变化

增大,  $d > 0.745$  时它的振幅超过上游的波峰,  $d = 1.03$  时其振幅最大, 如图 3 所示, 达到前面波峰的 1.31 倍, 且此时  $C/C_u = 1.384$ 。之后振幅降低直至稳定值, 低于前面的波峰。 $d = 1.5$  时  $C/C_u = 1.002$ , 此时  $(d, -1)$  处的点涡对上游  $(-d, -1)$  的作用已非常小。

图 3 表明双点涡生成波形的下游稳定波的波高随着  $d$  周期性变化, 周期接近单点涡  $\varepsilon = -0.23$  生成波形的下游稳定波长, 最大波高  $1.943 h_c$ ,  $h_c$  表示单个点涡  $\varepsilon = -0.23$  对应的下游稳定波波高, 双点涡生成波形的最大波高为两个单点涡分别生成的波形的稳定波高的和的 0.972 倍。 $d = 0.413$  时波高最低, 仅为  $3.48 \times 10^{-4}$ 。图 4 比较了  $d = 0.413$  时分别改变  $\varepsilon_1$  和

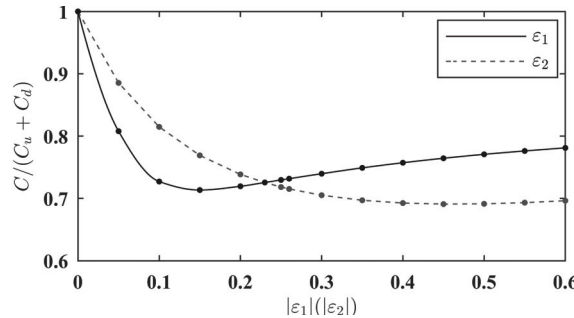


图 4 分别改变  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  时  $C/(C_u + C_d)$  的变化情况

$\varepsilon_2$  时  $C/(C_u + C_d)$  的变化情况, 其中  $C$  是双点涡生成波形的最大波峰,  $C_u$ 、 $C_d$  分别是  $(-d, -1)$ 、 $(d, -1)$  存在单个点涡  $\varepsilon < 0$  时对应界面波的最大波峰。当  $\varepsilon_1$  增加,  $C/(C_u + C_d)$  降到 0.713, 之后缓慢增加,  $\varepsilon_1 = -0.6$  仅增至 0.781. 而当  $\varepsilon_2$  增加,  $C/(C_u + C_d)$  始终降低,  $\varepsilon_2 = -0.6$  仅为 0.696. 两条曲线交点对应了对称点涡的情形, 此时  $C/(C_u + C_d) = 0.726$ . 仅改变上/下游点涡强度均使得  $C/(C_u + C_d)$  整体呈下降趋势, 但是具体行为则截然不同。

## 参 考 文 献

- 1 Stanislaw R. Massel. Internal gravity waves in the shallow seas. Internal Gravity Waves in the Shallow Seas. Series: GeoPlanet: Earth and Planetary Sciences, ISBN: 978-3-319-18907-9. Springer International Publishing (Cham), Edited by Stanislaw R. Massel, 2015.
- 2 S. R Belward and Larry K. Forbes. Fully non-linear two-layer flow over arbitrary topography. Journal of Engineering Mathematics, 1993,27(4):419-432.
- 3 Zhen Wang, Changhong Wu, Li Zou, Qianxi Wang, and Qi Ding. Nonlinear internal wave at the interface of two-layer liquid due to a moving hydrofoil. Physics of Fluids, 2017,29(7):65-69.
- 4 R. W Yeung and T. C Nguyen. Waves generated by a moving source in a two-layer ocean of finite depth. Journal of Engineering Mathematics, 1999,35(1-2):85-107.
- 5 Gang Wei, Jiachun Le, and Shiqiang Dai. Surface effects of internal wave generated by a moving source in a two-layer fluid of finite depth. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 2003,

- 24(9):1025–1040.
- 6 Gang Wei, Dongqiang Lu, Shiqiang Dai. Waves induced by a submerged moving dipole in a two-layer fluid of finite depth. *Acta Mechanica Sinica*, 2005,21(1):24–31.
  - 7 Zhen Wang, Li Zou, Hui Liang, Zhi Zong. Nonlinear steady two-layer interfacial flow about a submerged point vortex. *Journal of Engineering Mathematics*, 2016,103(1):1–15.
  - 8 王振, 吴常红, 邹丽. 分层流体中点涡对非线性界面波的影响分析[J]. *江苏科技大学学报: 自然科学版*, 2017(31):566.
  - 9 Larry K Forbes. On the effects of non-linearity in free-surface flow about a submerged point vortex. *Journal of Engineering Mathematics*, 1985,19(2):139–155.
  - 10 John E Dennis , J. More Jorge. Quasi-newton methods, motivation and theory. *Siam Review*, 1977,19(1):46–89.

## Nonlinear interaction of internal waves in a double point vortices

LIU Di, WANG Zhen

School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024.

**Abstract:** In this paper, we investigate the influence of the symmetric/antisymmetric vortex interaction on the interfacial wave in a two-dimensional two-layer steady flow, where the vortex pair is located in the lower layer fluid of infinite depth. The integral-differential equations of the interface are established based on the potential flow theory and the boundary integral equation method, and is solved numerically based on the quasi-Newton method. The influence of the distance between two vortices on the interface in the model is discussed. It is found that the wave height of the downstream steady wave profiles oscillates periodically, and the period is about the wavelength of the downstream stable wave for only a single point vortex upstream. The extreme values are about the superposition of the amplitudes of two downstream steady waves for two vortices respectively. The maximum value is at most 1.742 times that for the single point vortex and decreases as the distance increases. The individual strengths are changed separately. In these two cases the largest crest is lower than the sum of that for two point vortices and decrease overall, but the variation is different.

**Key words:** Stratified flow; vortex pair; boundary integral equation; integral-differential equation; nonlinear interface wave