

# 基于 harmonic polynomial cell(HPC)方法的 聚焦波非线性模拟<sup>1</sup>

孙小童, 张崇伟\*, 宁德志

(大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 大连, 116024)

\*通讯作者 Email: [chongweizhang@dlut.edu.cn](mailto:chongweizhang@dlut.edu.cn)

**摘要:** 通过前期发展, harmonic polynomial cell (HPC)方法已被认为是一种具有很发展前景的计算流体力学方法。该方法基于势流理论建立, 具有四阶精度, 且形成稀疏系数矩阵, 与传统满秩和不对称矩阵边界元法相比具有优势。目前人们仍在探索和扩大这种新方法的适用范围。本文基于 HPC 方法, 在时域内建立非线性数值波浪水槽, 采用半拉格朗日方法对瞬时自由面边界条件进行更新, 对波浪在不平坦海底上的传播特性和聚焦波的生成过程开展模拟。通过与实验数据比较, 验证了该数值模型用于上述两类非线性波浪问题的有效性。

**关键词:** harmonic polynomial cell; 波浪水槽; 聚焦波; 势流; 地形

## 1 引言

Shao & Faltinsen<sup>[1-2]</sup>提出了一种求解势流问题的新方法, 称为 harmonic polynomial cell (HPC)。该方法通过重叠单元离散计算域, 利用完整谐波多项式集的线性叠加来表示每个单元的速度势, 形成具有稀疏系数矩阵的线性方程组, 完成边值问题的求解。与传统边界元方法相比, HPC 方法无需构造和求解满秩系数矩阵, 在计算效率等方面具有优势。本文将利用 HPC 方法对两类非线性波浪问题开展研究, 以验证该方法的有效性。①模拟波浪在不均匀海底上的传播问题, 与 Beji & Beji<sup>[3-4]</sup>关于波浪经过潜堤传播的实验结果进行对比。②模拟聚焦波的生成问题, 与 Ning 等<sup>[5]</sup>聚焦波实验结果进行对比。

<sup>1</sup>基金项目: 国家自然科学基金 (51709038, 51679036), 中国博士后科学基金 (2018M630289)和中央高校基本科研业务费 (DUT19RC(4)027)资助项目

## 2 数学模型

建立一个二维数值波浪水槽，在水槽左侧设置造波板，水槽右侧设置一个人工阻尼区，以吸收右传波浪。建立笛卡尔坐标系  $Oxz$ ， $O$  位于初始时刻造波板和静水面的交点处， $x$  轴水平指向右边， $z$  轴垂直向上。假设流体是不可压缩的、无黏的和运动无旋的，引入势流理论中满足拉普拉斯方程下的速度势  $\varphi$  来描述波浪水槽内流体运动。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

在瞬时自由面上，运动学和动力学边界条件采用半拉格朗日的形式为

$$\frac{\delta \varphi}{\delta t} = -g\eta - \frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial t} - v\varphi \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - v\varphi \quad (3)$$

其中， $\eta$  表示自由面升高， $g$  是重力加速度。 $\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_p \cdot \nabla$ ， $\mathbf{V}_p$  为自由表面观察点的运动速度。在自由表面边界条件中引入了含  $v$  的人工阻尼项。在人工阻尼区内阻尼强度  $v = 1.25\omega/2\pi$  ( $\omega$  为特征波频率)，阻尼区的长度设置为特征波长的两倍。造波机边界条件表示为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v \cdot \bar{n} \quad (4)$$

其中， $v$  是造波板上一点速度， $n$  是该点处物面的单位法矢量。海底边界条件为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (5)$$

采用四阶 Runge-Kutta 方法对自由面条件进行时间步进。

采用 HPC 方法求解上述关于速度势的边值问题，将计算域划分为相互重叠的单元格。各单元由 9 个节点组成 (图 1)。各单元内，速度势由前 8 个多项式的线性组合插值得到

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^8 b_j f_j(x, y) \quad (6)$$

其中， $j$  是每个单元格的局部索引值， $b_j$  是对应的系数。 $f$  的表达式如下

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 1 & f_2(x, y) &= x & f_3(x, y) &= y \\ f_4(x, y) &= x^2 - y^2 & f_5(x, y) &= xy & f_6(x, y) &= x^3 - 3xy^2 \\ f_7(x, y) &= 3x^2y - y^3 & f_8(x, y) &= x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \end{aligned} \quad (7)$$

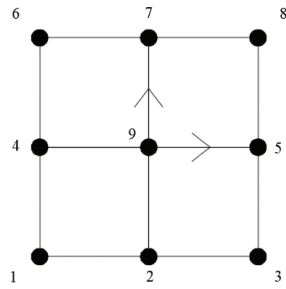


图1 一个单元格中各点索引定义

### 3 数值结果和讨论

#### 3.1 规则波在不均匀海底地形的传播

本小节将对比 HPC 的数值模拟结果与 Beji & Bettje<sup>[3-4]</sup>的实验测量结果。图 2 为波浪水槽布置图。根据实验装置选择以下几何参数，即  $L=30\text{m}$ ,  $d=0.4\text{m}$ ,  $e=0.3\text{m}$ ,  $a=2\text{m}$ ,  $g=6\text{m}$ ,  $b=6\text{m}$ ,  $c=3\text{m}$  和  $h=16\text{m}$ 。预期波高的振幅和周期分别设置为  $A=0.01\text{m}$  和  $T=2\text{s}$ ，圆频率  $\omega_0=\pi$ ，选取 6 个波面测量位置  $x=10.5\text{m}$ ,  $12.5\text{m}$ ,  $13.5\text{m}$ ,  $14.5\text{m}$ ,  $15.7\text{m}$  和  $17.3\text{m}$ 。入射波高  $H=0.02\text{m}$ ，周期  $T=2\text{s}$ 。其他详细情况请见 Beji & Bettje<sup>[3-4]</sup>。采用如图 3 离散网格计算。造波机的运动方程为  $S(t) = -F \cos \omega t$ ，其中， $F = A/2(\sinh 2kd + 2kd)/(\cosh 2kd - 1)$  是推板造波机的传递函数， $x_0$  是聚焦位置， $t_0$  是聚焦时间， $\omega$  为特征波频率， $k$  是波数， $A$  是预计波幅。图 3 对比了 6 个测试点处 HPC 数值计算和实验测得的自由水面升高时历曲线。可以看出数值和实验结果基本一致，但是有一定周期差别。图 4 和表 1 分别对  $x=10.5\text{m}$  处的数值和实验结果进行了主频率分析。图 5 在对数值结果进行快速傅里叶分析后，显示数值结果的主频率为目标频率（对应周期 2s）。表 1 提取了峰值实验数据的对应时间，发现实验数据的平均周期为 2.02s，与目标周期 2s 有微小差别。

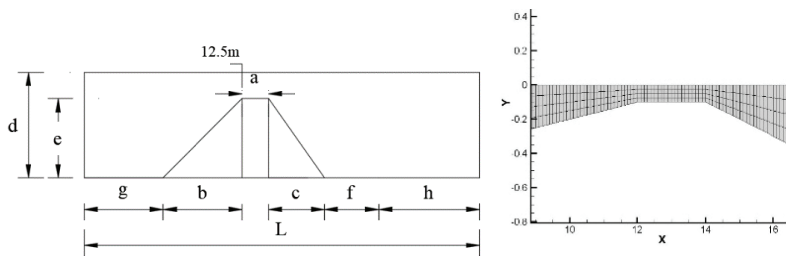


图2 数值波浪水槽示意图

图3 波浪在不平整海底传播问题中的网格结构

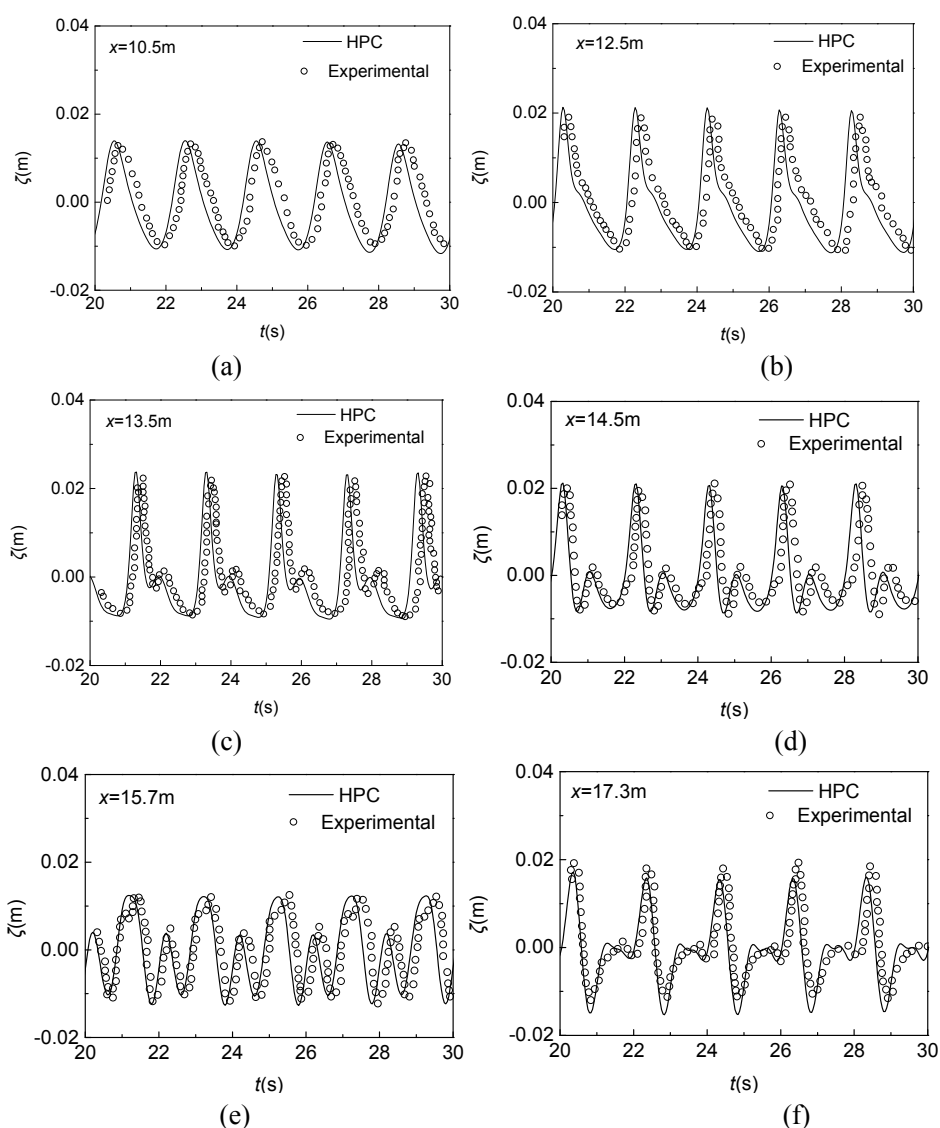


图4 自由表面随时间变化与 Bejji 和 Battjes 实验测量结果在水槽 6 个不同位置处的数值比较

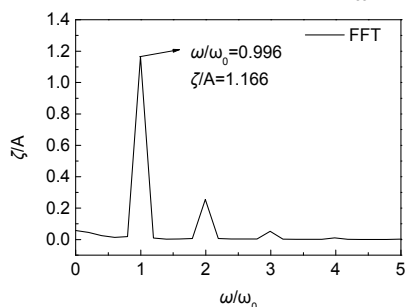


图5  $x=10.5\text{m}$  处自由面波浪运动的 FFT 频谱

表 1 实验曲线波峰坐标 ( $x=10.5\text{m}$ )

时间 (s)	振幅 (m)
20.6469	0.01287
22.695421	0.01323
24.71698	0.01372
26.71159	0.01311
28.76011	0.01348

### 3.2 聚焦波模拟

本小节考虑聚焦波经过平整海底的情况。设置水深  $d=0.5\text{ m}$ ，数值水槽长度  $L=69\text{ m}$ ，聚焦位置  $x=11.4\text{ m}$ ，聚焦时间  $t=100\text{ s}$ ，周期范围  $T=0.83\text{--}1.67\text{ s}$ ，预期波高  $H=0.0626\text{ m}$  和  $0.01104\text{ m}$ 。入射波采用与 Ning<sup>[5]</sup>相同的频谱，聚焦波生成方式参见 Ning 等<sup>[6]</sup>。图 6 显示了两种波高条件下聚焦位置处的自由面升高的时间历程曲线，并将数值和实验结果进行了比较。结果显示数值结果与实验数据吻合良好，表明 HPC 方法可以对聚焦波问题进行较好的模拟。

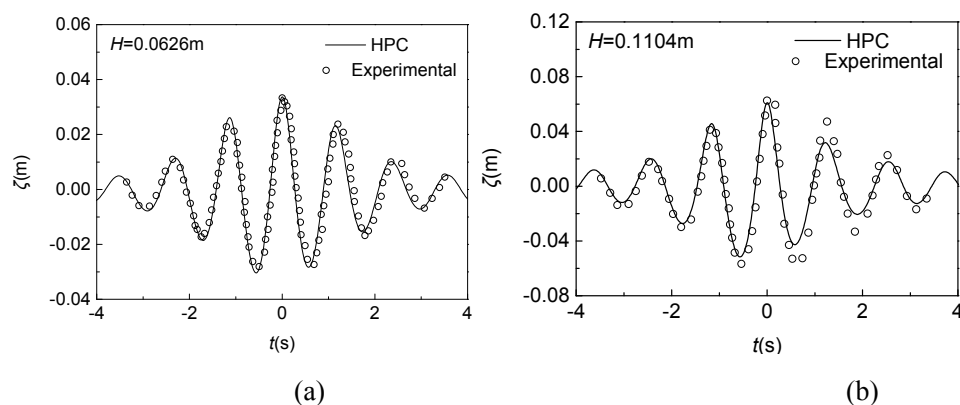


图 6 聚焦位置处自由面时间历程曲线(a)  $H=0.0626\text{ m}$  和(b)  $H=0.1104\text{ m}$

## 4 结论

本文基于 HPC 方法建立了非线性数值波浪水槽，模拟了波浪在不均匀海底上的传播和聚焦波的生成两类非线性波浪问题，并将计算所得时间历程曲线与实验数据进行了对比分析。研究发现数值结果与实验数据基本一致，表明 HPC 方法可以对本文两类波浪问题进行良好模拟，值得被进一步研究和拓展。

## 参考文献

- 1 Shao, Y.L., Faltinsen, O.M. "Towards Efficient Full-nonlinear Potential-flow Solvers in Marine Hydrodynamics," Proc. the 31st International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering (OMA), Rio De Janeiro, Brazil, 2012,
- 2 Shao, Y.L., Faltinsen, O.M. "Fully-nonlinear Wave-current-body Interaction Analysis by a Harmonic Polynomial Cell Method," J. Offshore. Mech. Arct. Eng., 2014, 136(3): 031301-031307.
- 3 Beji S., Battjes J., "Experimental Investigation of Wave Propagation over a Bar," Coast. Eng., 1993, 19:151 –

162.

4 Beji S. , Battjes J. “Numerical Simulation of Nonlinear Wave Propagation over aBar.” Coast. Eng., , 1994,23: 1-16.

5 Ning, D.Z., Zang, J., Liu, S.X., et al. “Free-surface Evolution and Wave Kinematics for Nonlinear Uni-directional Focused Wave Groups.” Ocean Eng. 2009, 36:1226–1243.

6 Ning, D. Z., Du. J. “Numerical Investigation of Wind Influence on the Focused Wave Group,” 20th Australasian Fluid Mechanics Conference. Perth, Australia ,2016.

## **Nonlinear simulation of focused waves using harmonic polynomial cell (HPC) method**

SUN Xiao-tong, ZHANG Chong-wei<sup>\*</sup>, NING De-zhi

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, 116024, China

<sup>\*</sup>Corresponding author: [chongweizhang@dlut.edu.cn](mailto:chongweizhang@dlut.edu.cn))

**Abstract:** Through an early development, the harmonic polynomial cell (HPC) method has been considered as an effective CFD method with promising prospects. This method is based on the potential-flow theory with fourth-order accuracy. The HPC method forms a sparse coefficient matrix, which is an advantage over the standard boundary element method (normally with a fully populated and unsymmetrical matrix). Efforts on extending the application scope of this method are still ongoing. Based on the HPC method, a nonlinear numerical wave tank is established in the time domain. The free surface boundary conditions are updated instantaneously using the semi-Lagrangian method. Two cases, i.e. the wave propagation over an uneven seabed and the generation of focusing waves, are simulated. Through comparison with the experimental data, the effectiveness of the HPC method for the considered wave problems is confirmed.

**Key words:** Harmonic polynomial; wave tank; focusing wave; potential flow; seabed