

# 基于多流体域匹配求解方法的港口内波浪共振特性研究

石玉云, 李志富

(哈尔滨工程大学 船舶工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001, Email: [shiyuyun@hotmail.com](mailto:shiyuyun@hotmail.com);  
江苏科技大学, 船舶与海洋工程学院, 江苏 镇江 212003, Email: [zhifu.li@hotmail.com](mailto:zhifu.li@hotmail.com))

**摘要:** 本研究基于势流理论, 采用多流体域匹配求解方法, 建立波浪与港口相互作用的三维数值模型。引入镜像格林函数和对流体速度势进行分解, 移除向两端无限延伸海岸线上的积分。通过分别与矩形平底港口解析解、岸式平底振荡水柱解析解比较, 验证了本研究数值方法的准确性。而后对一不规则底部地形港口进行了计算研究, 结果表明, 自由面升高形状与港口底部形状相关。

**关键词:** 港口共振; 多流体域; 匹配分析

## 1 引言

相对于开敞水域, 港口内地形多变, 且其自身存在系列固有频率, 波浪在港口内的传播则变得极为复杂, 对其内浮体运动颇具危险性。因而, 准确地预报港口内波型特征和浮体运动, 对港口设计建造和安全装卸作业具有重大意义。针对港口流场问题, Mcnown<sup>[1-2]</sup>通过预先给定港口开口处的流场, 推导了圆柱形和矩形港口近似解析解。Hwang and Tuck<sup>[3]</sup>, Lee<sup>[4]</sup>采用 Helmholtz 方程进行求解, 前者在沿岸线上直接做积分, 后者采用多流域分解法。Isaacson and Qu<sup>[5]</sup>研究了不同反射边界的港口内流场, Kumar, Zhang<sup>[6]</sup>计算了带局部夹角的港口。除了 Laplace 方程、Helmholtz 方程, Boussinesq 方程<sup>[7]</sup>也逐渐应用于浅水港口问题。本文基于势流理论, 采用多流体域匹配求解方法, 进行三维直接求解。

## 2 数学模型及数值方法

对于内部任意形状的港口, 假设港口内外流体皆为理想流体, 无黏无旋, 不可压。整

个流体域分成两个子流域，即港口内域  $\Omega_1$  和外域开场水域  $\Omega_2$ 。定义两组笛卡尔坐标系。其中， $o-xyz$  原点位于平均静水面， $x$  垂直于交界面， $y$  轴沿交界面， $z$  垂直向上，港口沿岸边界线沿  $y$  轴向远方无限延伸。子域内总速度势可以表示为

$$\Phi^{(l)}(x, y, z, t) = \text{Re}\{[\phi_0^{(l)}(x, y, z) + \sum_{j=1}^6 i\omega\eta_j^{(l)}\phi_j^{(l)}(x, y, z)]e^{i\omega t}\} \quad (1)$$

其中， $\omega$  为波浪频率， $i = \sqrt{-1}$ ， $l = 1, 2$  表示内外域。等式右端第一项为散射势，第二项为辐射势， $j = 1, 2, 3$  为三个平动分量， $j = 4, 5, 6$  为三个转动分量。 $\eta_j$  为浮体第  $j$  个运动分量的复数幅值。 $\phi_j^{(l)}$  ( $j = 0, \dots, 6$ ) 满足

$$\nabla^2 \phi_j^{(l)} = 0 \quad (2)$$

相比于波长，波幅为小值，边界条件中的高阶项可以忽略，则自由面条件为

$$\frac{\partial \phi_j^{(l)}}{\partial z} - v\phi_j^{(l)} = 0 \quad (3)$$

相应的港口底部满足

$$\frac{\partial \phi_j^{(l)}}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

港口内域壁面表面不可穿透

$$\frac{\partial \phi_j^{(l)}}{\partial n} = 0 \quad (j = 0, \dots, 6) \quad (5)$$

浮体表面应满足

$$\frac{\partial \phi_j^{(l)}}{\partial n} = n_j \quad (j = 1, \dots, 6); \quad \frac{\partial \phi_0^{(l)}}{\partial n} = 0 \quad (6)$$

其中， $\bar{n} = (n_x, n_y, n_z)$  为法向量

$$(n_1, n_2, n_3) = (n_x, n_y, n_z), \quad (n_4, n_5, n_6) = (x', y', z') \times (n_x, n_y, n_z) \quad (7)$$

沿  $y$  轴向远方无限延伸  $S_y$  表面，物面不可穿透

$$\frac{\partial \phi_j^{(2)}}{\partial n} = 0 \quad (j = 0, \dots, 6) \quad (8)$$

无穷远应满足辐射条件

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left( \frac{\partial \phi_j^{(2)}}{\partial R} - ik_0 \phi_j^{(2)} \right) = 0 \quad (j = 1, \dots, 6) \quad (9)$$

以保证波浪向外传播。其中， $R^2 = x^2 + y^2$ ， $k_0$ 为下式色散方程

$$k_0 \tanh(k_0 h) = \nu \quad (10)$$

的纯虚根。注意，对于绕射问题，定义 $\phi_7^{(2)} = \phi_0^{(2)} - \phi_1$ 。

采用格林定理，对于内域 $\Omega_1$ ，得到边界积分方程

$$\alpha^{(1)}(p)\phi_j^{(1)}(p) = \int_{S_W + S_H + S_a + S_B} [G^{(1)}(p, q) \frac{\partial \phi_j^{(1)}(q)}{\partial n_q} - \frac{\partial G^{(1)}(p, q)}{\partial n_q} \phi_j^{(1)}(q)] dS \quad (j=0, \dots, 6) \quad (11)$$

$\alpha^{(1)}(p)$ 为固角系数。选取自由面格林函数

$$G(p, q) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_2} + \int_L \frac{2(k+\nu)e^{-kh} \cosh[k(\zeta+h)]}{k \sinh(kh) - \nu \cosh(kh)} J_0(kR) \cosh[k(z+h)] dk \quad (12)$$

其中， $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ 为场点 $p$ 与源点 $q$ 距离， $r_2$ 为场点跟镜像点之间的距离。 $J_0(kR)$ 为第一类零阶贝塞尔函数。

对外域 $\Omega_2$ 应用格林定理，得到外域边界积分方程

$$\alpha^{(2)}(p)\phi_j^{(2)}(p) = \int_{S_y + S_a} [G^{(2)}(p, q) \frac{\partial \phi_j^{(2)}(q)}{\partial n_q} - \frac{\partial G^{(2)}(p, q)}{\partial n_q} \phi_j^{(2)}(q)] dS \quad (j=1, \dots, 6) \quad (13)$$

格林函数依然满足自由面和远方控制面边界条件，其上积分可移除。若直接利用跟内域相同的格林函数，外域边界积分方程中会含有壁面 $S_y$ 积分，而这个积分面为无穷大。对格林函数处理，定义外域格林函数为

$$G^{(2)} = G(p, q) + G(p, \bar{q}) \quad (14)$$

其中 $\bar{q}$ 为 $q$ 关于 $x=0$ 的镜像点。该格林函数在 $S_y$ 上满足 $\partial G^{(2)}/\partial n = 0$ 。对于 $j=0$ ，对绕射势 $\phi_7^{(2)}$ 做如下分解

$$\phi_7^{(2)} = \phi_7^{(2)'} + \phi_7^{(2)''} \quad (15)$$

其中

$$\phi_7^{(2)'}(x, y, z) = \phi_1(-x, y, z) \quad (16)$$

利用入射势，可直接求得绕射势分量 $\phi_7^{(2)'}$ 。由式(8)不难得到 $S_y$ 上 $\partial \phi_7^{(2)'}/\partial n = 0$ 。 $\phi_7^{(2)'}$ 满足辐射条件式(9)，进而绕射势分量 $\phi_7^{(2)''}$ 的求解也适用于式(15)。

内外域交界面 $S_a$ 上压力和速度连续

$$\phi_j^1 = \phi_j^2; \quad \frac{\partial \phi_j^{(1)}}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_j^{(2)}}{\partial n} \quad (j=0, \dots, 6) \quad (17)$$

利用式 (11), 式 (13) 和式 (17), 方程组封闭, 即可求得流场内速度势。

### 3 数值验证与结果分析

选取入射势

$$\phi_I = \frac{ig\zeta_a}{\omega} \frac{\cosh[k_0(z+h)]}{\cosh(k_0h)} e^{ik_0(x\cos\beta - y\sin\beta)} \quad (18)$$

其中,  $\beta$  为浪向角,  $\zeta_a$  为入射波波幅。算例港口为全开口箱型, 长和宽分别为 1, 0.1939, 水深 0.8268, 皆为无因次量。幅值因子  $R$  为点  $(-L_w, 0, 0)$  处  $\phi_0^{(1)}$  与点  $(0, 0, 0)$  处  $\phi_0^1 + \phi_I$  的比值。由图 1 可知, 本文计算结果与 Lee<sup>[4]</sup>文中解析解结果吻合良好。

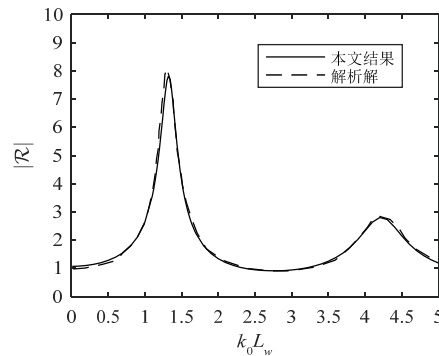


图 1 点  $(-L_w, 0, 0)$  处波浪主干扰力与入射势比值幅值

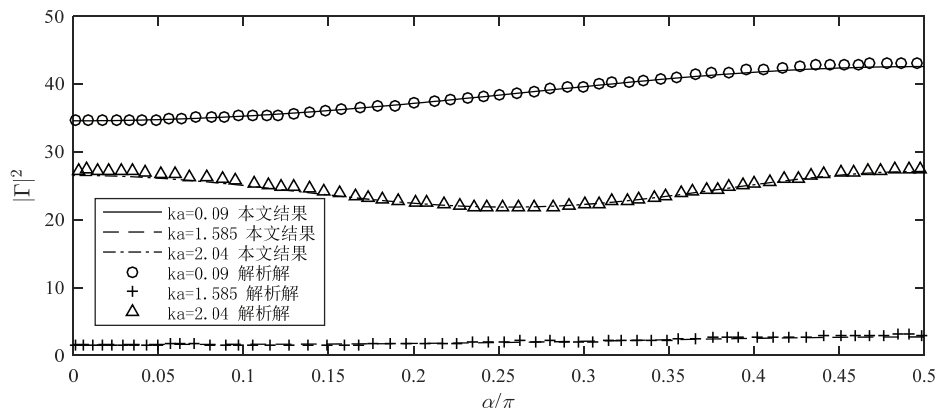


图 2  $|\Gamma|^2$  沿入射角变化趋势 ( $a/h=0.5, d/h=0.2$ )

选取Martins-Rivas和Mei<sup>[8]</sup>的近岸振荡水柱模型 (OWC), 港口内为直立圆柱壳体, 内径为  $a$ , 一半在港口内, 一半在港口外, 从底部到  $z = -d$  开口, 开口处与港口外开敞水域连通。图2给出了  $|\Gamma|^2$  的计算结果 ( $\Gamma$  为圆柱内部液面法向速度积分)。计算波数  $ka$  为 0.901, 1.585, 2.04。波浪入射角为  $\alpha$  ( $\alpha = \pi/2 - \beta$ )。圆柱尺寸为  $a/h = 0.5$ ,  $d/h = 0.2$ 。单元长度为  $\lambda_{\min}/39$ 。由图2可知, 本文计算结果与解析解吻合良好。

选取一不规则底部港口, 港口为圆柱形, 内径为  $R$ , 开口角度为  $2\pi/3$ , 底部沿坐标轴方向  $R/2$  处各有一半径为  $a$  的半圆形突起 ( $x$  轴上一个,  $y$  轴上两个), 且  $R/a = 10$ , 波长  $\lambda/R$  取为 0.25, 0.5, 0.75, 1.00。图3给出了该港口内4个工况下的波面升高。结果表明, 自由面升高形状与港口底部形状息息相关。在底部不平整地带, 出现了多个波峰圈。随着波长增大, 波面升高峰值相对减小, 但其他区域数值明显变大, 且整体波面形成具有更为缓和的波峰带和波谷圈。

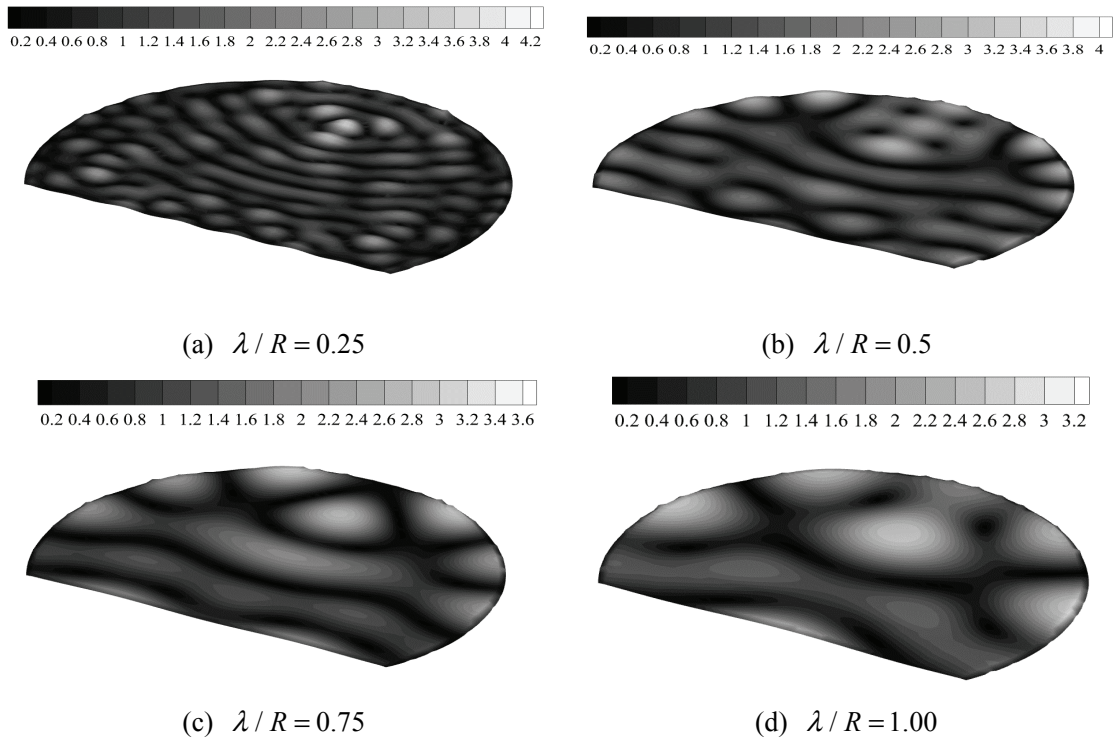


图3 不规则底部港口内自由面波面升高

## 4 结论

本研究利用势流理论, 采用多流域匹配法, 建立了港口内三维流场求解模型。通过与

矩形港口, 圆形近岸振荡水柱结构模型结果比较, 验证了本研究计算方法和计算结果的准确性。通过对底部不规则港口流场的数值模拟, 研究了底部形状对流场的影响, 对港口流场和浮体运动数值预报具有重要意义。

## 参 考 文 献

- 1 Mcnown JS. Waves and seiche in idealized ports. Gravity Waves Symposium, National Bureau of Standards. 1952;Cir.:153-164.
- 2 Kravtchenko J, Mcnown JS. Seiche in rectangular ports. Quart Appl Math. 1955;13:19-26.
- 3 Hwang L-S, Tuck EO. On the oscillations of harbours of arbitrary shape. J Fluid Mech. 1970;42:447-64
- 4 Lee JJ. Wave-induced oscillations in harbours of arbitrary geometry. J Fluid Mech. 1971;45:375-94.
- 5 Hamanaka KI. Open, partial reflection and incident-absorbing boundary conditions in wave analysis with a boundary integral method. Coast Eng. 1997;30:281-98.
- 6 Kumar P, Zhang H, Kim KI, Shi Y, Yuen DA. Wave spectral modeling of multidirectional random waves in a harbor through combination of boundary integral of Helmholtz equation with Chebyshev point discretization. Computers & Fluids. 2015;108:13-24
- 7 Guerrini M, Bellotti G, Fan Y, Franco L. Numerical modelling of long waves amplification at Marina di Carrara Harbour. Appl Ocean Res. 2014;48:322-30.
- 8 Martins-Rivas H, Mei CC. Wave power extraction from an oscillating water column along a straight coast. Ocean Engineering. 2009;36:426-33.

## Wave evolution in an arbitrary harbour based on domain decomposition method

SHI Yu-yun, LI Zhi-fu

(College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China. Email: shiyuyun@hotmail.com; School of Naval Architecture and Ocean Engineering, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212003, China. Email: zhifu.li@hotmail.com)

**Abstract:** In this paper a three-dimensional domain decomposition method is used to solve the 3D model of wave interaction with an arbitrary shaped harbour. The advantage of the domain decomposition method over the single domain method together with Mirror Green function is that it removes the coastal surface from the boundary integral equation. The accuracy of the method is demonstrated through the comparison with the published data. Extensive results through a case with uneven seabed are provided. Highly correlations between the topography and the wave elevation are observed.

**Key words:** Harbour oscillation; Domain decomposition; Matching method.