

基于位移法浅水波理论波浪破碎数值模拟

黄东威¹, 吴锋*, 钟万勰, 张洪武

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连, 116023)

摘要: 本文在 Lagrange 坐标系下推导了二维浅水波波浪破碎项。考虑水底不光滑引起的摩阻项。基于位移法浅水波理论构建了包含破碎项和摩阻项的浅水波数值模型。利用保辛算法和有限元建立了相应的求解格式。最后通过文献算例验证了本文所得到的浅水波数值模型可以有效的模拟近海岸波浪浅化的运动情况。

关键字: 浅水波; 位移法; 波浪破碎; 保辛算法; 有限元

1 引言

近海岸波浪的运动过程属于浅水波问题。传统的浅水波问题是在 Euler 坐标下以流速作为基本未知量进行描述, 很难得到相应的变分原理。而且在处理动边界(干湿界面问题)和不平水底的源项等问题时存在虚假振荡、负水深、质量损失等数值困难[1-7]。基于此, 文献[8-14]等采用位移法研究浅水波问题。通过假定水平位移与竖向坐标无关, 给出了位移法的不可压缩条件, 基于分析力学的 Hamilton 变分原理, 导出了位移法浅水波方程, 并采用有限元和保辛算法计算非线性浅水波的演化。所构造的算法可以克服负水深、虚假振荡等数值现象, 可以长时间仿真浅水波的非线性演化, 没有质量、能量损失等数值问题。但上述研究工作中没有考虑浅水波波浪破碎现象, 实际上浅水波的波浪破碎十分常见。文献[16-18]研究海浪破碎对近海岸的珊瑚礁的影响进行了试验模拟和数值模拟。文献[19-21]通过分析海洋建筑在承受海浪破碎影响下结构的损害情况给出了具体的数值分析。准确分析波浪破碎对近海岸的海洋生态环境影响以及对海洋工程设施和水工建筑的载荷设计具有重要意义。因此, 本文在文献[8,13]的基础上推导了基于 Lagrange 坐标下的波浪破碎项。构建了考虑波浪破碎、底摩阻和水底不平滑的近海岸波浪浅化数值模型。

基金项目: 国家自然科学基金(51609034, 11472076); 中央高校基本科研业务费(DUT17RC(3)069)

作者简介: 黄东威(1994-), 男, 辽宁省营口市人, 博士(E-mail:2808592000@qq.com)

吴锋(1985-), 男, 江苏省靖江市人, 副教授, 博士(E-mail:wufeng_chn@163.com)

通讯地址: 辽宁省大连市大连理工大学综合实验一号楼 506 房, 电话: 13940846142.

2 含破碎项、摩阻项的作用量

基于 Lagrange 坐标系, 不考虑破碎作用的浅水波方程有^{13-14]}

$$\ddot{u} - \frac{1}{3}\ddot{u}_{xx}h^2 - \frac{\partial(\ddot{u}hh_x)}{\partial x} = g \frac{\partial^2}{\partial x^2}(hu) + g \left(\frac{1}{2}h_{xxx}u^2 - 3u_x \frac{\partial(hu_x)}{\partial x} \right) \quad (1)$$

式中, u 表示水平位移, \ddot{u} 表示水平加速度, u_x 表示水平位移的一阶偏导, \ddot{u}_{xx} 表示水平加速度的二阶偏导; g 表示重力加速度; h 表示水面静止时的水深, h_x 表示静水深的一阶偏导, h_{xxx} 表示静水深的三阶偏导。式(1)可以通过 Hamilton 变分原理导出。因此, 可以采用有限元和保辛方法求解。与传统 Euler 浅水方程相比, 位移法浅水波方程仅采用水平位移作为基本未知量, 少了一个未知量和微分方程, 数值计算时计算量减少一半, 在处理干湿面时没有虚假振荡, 计算精度和稳定性好。但是(1)式中还没有考虑破碎效应, 实际上浅水波的波浪破碎十分常见。在传统 Euler 坐标系下, 参考文献²³考虑破碎项的浅水波方程有

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \xi} \bar{d} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} U = 0 \\ \frac{\partial U(\xi, t)}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} g + \frac{1}{3} \bar{d} \frac{\partial^3 \bar{\eta}}{\partial t^2 \partial \xi} + R = g \bar{h}_\xi \end{cases} \quad (2)$$

式中, $\bar{\eta}$ 是 t 时刻 ξ 处的水面高度, ξ 是 Euler 坐标下的水平坐标, U 是 ξ 处的流速, $\bar{d} = h + \bar{\eta}$ 为当地水深, h 为初始时刻水深, $\bar{h}(\xi) = h(x+u)$; $R = R_f + R_b$ 即为扩展项, 其中 $R_f = g \frac{nU|U|}{\bar{d}}$ 为摩阻项, n 为摩阻系数, R_b 为波浪破碎引起的耗散项。本文基于文献²¹用涡粘法来处理波浪破碎, 则有

$$R_b = \frac{1}{\bar{d}} [(B\sigma^2 |\bar{\eta}|)(\bar{d}U)_\xi]_\xi \quad (3)$$

式中, σ 是控制波浪破碎强度参数; B 的确定由指标 η_i^* (与水波破碎的起止时间相关) 控制

$$B = \begin{cases} 1, & \eta \geq 2\eta_i^* \\ \frac{\eta}{\eta_i^*} - 1, & \eta_i^* < \eta \leq 2\eta_i^* \\ 0, & \eta \leq \eta_i^* \end{cases}, \quad \eta_i^* = \begin{cases} \eta_i^{(F)}, & t \geq T^* \\ \eta_i^{(I)} + \frac{t-t_0}{T^*} (\eta_i^{(F)} - \eta_i^{(I)}), & 0 \leq t - t_0 \leq T^* \end{cases} \quad (4)$$

式中, T^* 为破碎持续时间, $\eta_i^{(I)}$, $\eta_i^{(F)}$ 为破碎开始和终止参数, t_0 为破碎起始时间。考虑到不同坐标系下的浅水波方程之间存在如下转换形式

$$\xi = x + u, \quad U(\xi, t) = \dot{u}(x, t), \quad \bar{\eta}(\xi, t) = \eta(x, t), \quad \bar{d}(\xi, t) = d(x, t) = \frac{h(x)}{1 + u_x} \quad (5)$$

式中, $u(x, t)$ 为水平位移, $\eta(x, t)$ 为竖直位移, $d(x, t)$ 为水深, $h(x)$ 为初始时刻水深。因此, 基于 Lagrange 坐标系含摩阻项和破碎项的浅水波方程为

$$\ddot{u} - \frac{1}{3} \ddot{u}_{xx} h^2 - \frac{\partial(\dot{u} h h_x)}{\partial x} + R_f + R_b = g \frac{\partial^2}{\partial x^2} (hu) + g \left(\frac{1}{2} h_{xxx} u^2 - 3u_x \frac{\partial(hu_x)}{\partial x} \right) \quad (6)$$

式中:

$$\begin{aligned} R_f &= g \frac{n\dot{u}|\dot{u}|}{d} \\ R_b &= \frac{\text{sign}(\eta)B\sigma^2}{\beta} [\beta_x(1 - 2u_x + 3u_x^2) \left(\eta_x \dot{u} + \frac{2\eta \dot{u}_x (1 - 2u_x + 3u_x^2)}{(1 - u_x + u_x^2)} \right) \\ &\quad + \eta_x \beta \dot{u}_x + \frac{\eta \beta_{xx} (1 - 3u_x + 6u_x^2) \dot{u}}{(1 - u_x + u_x^2)}] \\ \eta &= \frac{-u_x}{1 + u_x} h - h_x u - \frac{1}{2} h_{xx} u^2 - \frac{1}{6} h_{xxx} u^3 \\ \eta_x &= (-2u_x + u_x^2 - u_x^3 + u_x^4) h_x - u(1 + u_x) h_{xx} - \frac{u^2}{2} (1 + u_x) h_{xxx} - \frac{1}{6} h_{xxxx} u^3 \end{aligned} \quad (7)$$

由于浅水波方程只有二阶精度, 忽略了 R_b 中关于 u 的二阶偏导数及其高阶偏导数。

摩阻项和破碎项可看做非保守力。因此, 含摩阻项、破碎项的 Hamilton 动力系统作用量为

$$S = \int_0^t (T - U) dt - \int_0^t R dt \quad (8)$$

式中, ρ 为液体密度, L 为计算水域总长, T 和 U 为系统的动能和势能, R 为耗散能。

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[h \rho \dot{u}^2 + \rho h h_x^2 \dot{u}^2 + \rho \dot{u}_x^2 \frac{1}{3} h^3 + \rho \dot{u}_x \dot{u} h^2 h_x \right] dx \\ U &= \int_0^L \frac{\rho g h^2(x)}{2} (u_x^2 - u_x^3) dx + \int_0^L \rho g h \left(-h_x u - \frac{1}{2} h_{xx} u^2 - \frac{1}{6} h_{xxx} u^3 \right) dx \\ &\quad - \int_0^L \frac{\rho g h^2(x)}{2} dx - \frac{\rho g h^2(L)}{2} u(L) + \frac{\rho g h^2(0)}{2} u(0) \\ R &= \int_0^L \rho h (R_f + R_b) u dx \end{aligned} \quad (9)$$

3 有限元离散格式

由于浅水波方程为非线性偏微分方程, 需要进行数值求解。在 Lagrange 坐标下进行有

限元离散，并定义

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^T(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (10)$$

式中， $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ 是形函数， $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)^T$ 是节点位移向量， n 是自由度数。将式(10)代入式(9)中，可得到对应的刚度阵 \mathbf{K}_0 ， \mathbf{K}_1 ，质量阵 \mathbf{M} ，恢复力 \mathbf{G}_0 ， \mathbf{G}_1 （考虑水底不平顺），阻尼力 \mathbf{F}_f ，破碎引起的耗散力 \mathbf{F}_b 如下

$$\mathbf{K}_0 = \int_0^L \rho g h^2 N_x N_x^T dx, \quad \mathbf{K}_1(\mathbf{u}) = \frac{3}{2} \int_0^L \rho g h^2 N_x (N_x^T \mathbf{u}) N_x^T dx \quad (11)$$

$$\mathbf{M} = \int_0^L \rho h \left[\mathbf{N} \mathbf{N}^T + N_x N_x^T \frac{1}{12} h^2 + \left(h_x \mathbf{N} + \frac{1}{2} N_x h \right) \left(h_x \mathbf{N} + \frac{1}{2} N_x h \right)^T \right] dx \quad (12)$$

$$\mathbf{G}_0 = \int_0^L \rho g h h_{xx} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dx, \quad \mathbf{G}_1(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho g h h_{xxx} \mathbf{N} (N_x^T \mathbf{u}) N_x^T dx \quad (13)$$

$$\mathbf{F}_f(\mathbf{u}) = \int_0^L \rho g h n \frac{(N_x^T \dot{\mathbf{u}}) |N_x^T \dot{\mathbf{u}}| (1 + N_x^T \mathbf{u})}{h} N_x^T dx, \quad \mathbf{F}_b(\mathbf{u}) = \int_0^L \rho h R_b N_x^T dx \quad (14)$$

\mathbf{K}_1 ， \mathbf{G}_1 为考虑非线性情况。阻尼项和破碎项不参与变分过程。则变分得

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_0 \mathbf{u} - \mathbf{K}_1(\mathbf{u}) \mathbf{u} = \mathbf{G}_0 \mathbf{u} + \mathbf{G}_1(\mathbf{u}) \mathbf{u} - \mathbf{F}_f(\mathbf{u}) - \mathbf{F}_b(\mathbf{u}) \quad (15)$$

浅水波是 Hamilton 系统，根据式(8)可知虽然系统为非保守系统，但是保辛算法的性能²⁴和反应能量的变化仍比非保辛算法要好²⁵。因此本文仍采用保辛算法即时间有限元法进行数值仿真，具体实现过程详见文献^[26]。

4 数值算例

本文研究文献²³中的算例，该算例分析孤立波在常数斜坡上的浅化过程。孤立波具体形式为

$$\eta = \frac{h(c^2 - gh) \operatorname{sech}^2 \left(x \cdot \sqrt{\frac{W}{2}} \right)}{gh - (c^2 - gh) \operatorname{sech}^2 \left(x \cdot \sqrt{\frac{W}{2}} \right)} \quad (16)$$

式中波速 c ，波宽相关参数 W 为

$$c^2 = gh \left(1 + \frac{\eta_0}{h + \eta_0} \right), \quad W = \frac{3(c^2 - hg)}{2h^2 c^2} \quad (17)$$

式中, η_0 为初始波高, x 为 Lagrange 坐标下的水平坐标。需要注意的是, 该浅化模型是从无穷远处到近海岸的一个浅化过程, 初始水深 h 要选在无穷远处, 且在无穷远处位移边界条件为零。本文算例参数参考文献²³, 其中孤立波波高为 0.2m, 缓坡坡度为 1:35, 破碎项相关参数 $\sigma = 1.5$, $T^* = 6\sqrt{h/g}$, $\eta_i^l = 0.05\sqrt{gh}$, $\eta_i^r = 0.65\sqrt{gh}$, 远端水深为 $h_0 = -1$ m, 单元长度 $\Delta x = 0.1$ m, 时间步长取为 $\Delta t = 0.02$ s, 本文孤立波破碎起始时间约为 $t_0 = 11.84$ s, 其判定依据根据位移法浅水波方程的约束条件来确立的, 即液体不可压缩条件

$$(1 + w_z)(1 + u_x) = 1 \quad (18)$$

其中 w_z 为竖向位移一阶偏导, u_x 为水平位移的一阶偏导。当 u_x 或 w_z 趋近于 -1 时即认为发生破碎。基于以上参数设置, 本文计算结果与文献结果比对如图 1 所示

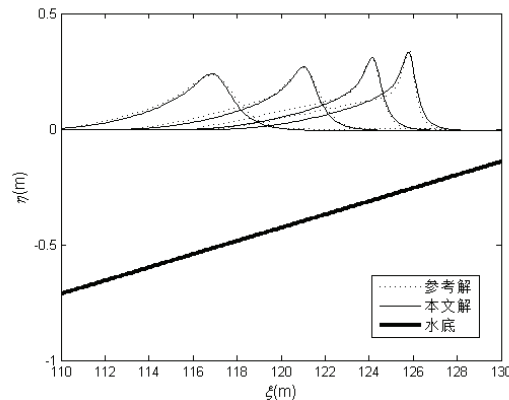


图 1 本文计算结果与文献结果比对

从图 1 可以看出, 本文结果与参考文献结果具有很好的吻合度。验证了本文所研究的基于 Lagrange 坐标下考虑波浪破碎、底摩阻和水底不平滑的近海岸波浪浅化的数值模型的正确性。同时基于保辛算法的稳定性, 本文的水波浅化数值模型具有长时间的仿真能力。

5 结束语

本文承接前人的工作基础, 基于位移法浅水波理论框架, 给出了包含破碎项和摩阻项的作用量。对作用量进行变分得到了包含破碎、摩阻的不平水底浅水波方程。通过有限元对非线性偏微分方程进行离散, 从而得到了基于 Lagrange 坐标下考虑波浪破碎的浅水波数

值模型。在数值计算上本文仅考虑了二维情况，后续工作将推广到三维情况。此外，为构建完整的基于 Lagrange 坐标系的浅水波数值水槽，之后的工作还将考虑消波问题。

参 考 文 献

- 1 VREUGDENHIL C B. Numerical Methods for Shallow-Water Flow [M]. Netherlands: Springer, 1994: 1-15.
- 2 兰姆 H. 理论流体动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1990. (LAMB H. Hydrodynamic [M]. Beijing: Science press, 1990. (In Chinese))
- 3 STOKER J J. Water Waves: The Mathematical Theory With Applications [M]. New York: Interscience Publishers LTD, 1957.
- 4 MORRISON P J. Hamiltonian description of the ideal fluid [J]. REVIEWS OF MODERN PHYSICS. 1998, 70(2): 467-521.
- 5 SAMPSON J, EASTON A, SINGH M. Moving boundary shallow water flow above parabolic bottom topography [J]. ANZIAM Journal. 2005, 47: 373-387.
- 6 BOLLERMANN A, NOELLE S, LUKACOVA-MEDVID'OVA M. Finite Volume Evolution Galerkin Methods for the Shallow Water Equations with Dry Beds [J]. COMMUNICATIONS IN COMPUTATIONAL PHYSICS. 2011, 10(2): 371-404.
- 7 宋利祥, 周建中, 邹强, 等. 一维浅水方程的强和谐 Riemann 求解器[J]. 水动力学研究与进展 A 辑, 2010(02): 231-238.
- 8 钟万勰, 姚征. 位移法浅水孤立波[J]. 大连理工大学学报, 2006, 46(1): 151-156.
- 9 WU F, ZHONG W. A shallow water equation based on displacement and pressure and its numerical solution [J]. Environmental Fluid Mechanics. 2017, 17(6): 1099-1126.
- 10 WU F, ZHONG W. On displacement shallow water wave equation and symplectic solution [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2017, 318: 431-455.
- 11 WU F, YAO Z, ZHONG W. Fully nonlinear (2+1)-dimensional displacement shallow water wave equation [J]. CHINESE PHYSICS B. 2017, 26(0545015).
- 12 WU F, ZHONG W X. Constrained Hamilton variational principle for shallow water problems and Zu-class symplectic algorithm [J]. APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS-ENGLISH EDITION. 2016, 37(1): 1-14.
- 13 吴锋, 钟万勰. 不平水底浅水波问题的位移法[J]. 水动力学研究与进展: A 辑, 2016, 31(5): 549-555
- 14 吴锋, 钟万勰. 浅水动边界问题的位移法模拟[J]. 计算机辅助工程, 2016, 25(2): 5-13.
- 15 吴锋, 钟万勰. 关于《保辛水波动力学》的一个注记[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(1): 1-7.
- 16 诸裕良, 宗刘俊, 赵红军, 等. 复合坡度珊瑚礁地形上波浪破碎的试验研究[J]. 水科学进

- 展,2018,29(05):717-727.
- 17 刘清君, 孙天霆, 王登婷. 岛礁陡坡地形上波浪破碎试验研究[J]. 水运工程, 2018(12):42-45.
- 18 郑茜, 张陈浩. 近岸带珊瑚礁台波浪破碎变形流场结构的试验和数值模拟[J]. 中国港湾建设, 2019, 39(02):36-40.
- 19 刘正浩, 万德成. 波流作用下海上固定式风机基础的水动力性能数值模拟[J]. 江苏科技大学学报(自然科学版), 2017, 31(05):555-560+566.
- 20 姜云鹏, 陈汉宝, 赵旭, 高峰. 长周期波浪冲击下胸墙受力试验[J]. 水运工程, 2018(05):35-39.
- 21 彭程, 耿宝磊, 张慈珩, 等. 不同因素对潜堤波浪传播的影响[J]. 水运工程, 2018(05):16-22+48.
- 22 KIRBY J T, WEI G, et al. FUNWAVE 1.0 Fully nonlinear Boussinesq wave model documentation and use's manual[R]. NewMark, CACR, 1998.
- 23 房克照, 邹志利. 应用二阶完全非线性 Boussinesq 方程模拟破碎波浪[J]. 水科学进展, 2012, 23(1):96-103.
- 24 邢誉峰, 杨蓉. 动力学平衡方程的 Euler 中点辛差分求解格式[J]. 力学学报, 2007, 23(1):100-105.
- 25 马秀腾, 陈立平, 张云清. 约束力学系统运动方程积分的数值耗散研究[J]. 系统仿真学报, 2009, 21(20):6373-6377.
- 26 Zhong W X, Gao Q, Peng H J. Classical Mechanics - Its symplectic description[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2013 (in Chinese).

Numerical simulation of wave breaking based on displacement method Shallow Water Wave Theory

HUANG Dong-wei¹, WU Feng^{*}, ZHONG Wan-xie, ZHANG Hong-wu

(State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian, 116023)

Abstract: In this paper, the two-dimensional shallow wave breaking term is derived under the Lagrange coordinate system. Consider the frictional resistance caused by the uneven bottom of the water. Based on the shallow water wave theory of displacement method, a numerical model of shallow water wave including fracture term and friction term is constructed. The corresponding solution format is established by using the symplectic algorithm and finite element method. Finally, a numerical example is given to verify that the shallow water wave numerical model obtained in this paper can effectively simulate the motion of near-shore waves shallowing.

Key words: Shallow water wave; Displacement method; Wave breaking; Symplectic algorithm; Finite element method