

基于 SFEM-DFPM 方法的流固耦合问题 模拟技术

张智琅, 龙厅, 刘谋斌*

(北京大学工学院, 北京, 100871, * Email: mbliu@pku.edu.cn)

摘要: 流固耦合问题涉及固体在流场作用下的运动、变形与破坏的各种行为以及固体位形对流场的影响, 其广泛存在于自然现象及工程系统之中。流固耦合问题往往具有强非线性、时变性, 含有介质大变形及运动界面, 给数值模拟造成了很大的挑战。解耦有限粒子法 (DFPM) 是一种高精度光滑粒子动力学方法 (SPH) 方法, 能够自然追踪运动界面, 方便处理大变形, 自由液面流动问题。光滑有限元 (SFEM) 能够解决传统有限元方法模拟结构“过刚”的问题, 可以精确高效的模拟结构变形。因此将解耦有限粒子法同光滑有限元结合为处理流固耦合问题提供了可靠的选择。本文阐述了 SFEM 同 DFPM 的耦合方式, 并进行了结构入水, 溃坝冲击弹性板等典型流固耦合算例测试。模拟结果表明 SFEM-DFPM 耦合方法可以有效处理各类带自由液面的流固耦合问题。

关键词: 光滑有限元法; 解耦有限粒子法; 流固耦合; 自由液面

1 引言

流固耦合问题涉及固体在流场作用下的运动、变形与破坏的各种行为以及固体位形对流场的影响, 其广泛存在于自然现象及工程系统之中。因此研究流固耦合问题对于解决科学和工程问题有着重要的意义。因为流固耦合现象的强非线性特征, 想要采用理论方法解决该类问题十分困难。而实验研究费用较高, 往往难以观察到该问题的细节特征。最近因为计算机技术的快速发展, 数值模拟为研究流固耦合问题提供了有效的途径。

目前对于流固耦合问题大部分的数值模拟基于网格类方法, 比如有限差分法^[1], 有限单元法^[2]以及有限体积法^[3]等。当处理比较复杂的边界形状时, 这些网格类方法往往需要自适应网格加密技术以刻画边界特征, 而这会大大增加计算时间。同时采用网格类方法模拟带

有自由液面，变形边界以及运动物质界面的问题时也具有一定的挑战性。因为在该情况下通常需要特殊的方法比如VOF法^[4]或是level set法^[5]来处理这些运动界面或是自由表面。

最近，粒子类方法发展迅速，因为他们在处理带有自由液面的不可压缩流动问题时有着天然的优势^[6]。粒子类方法采用任意分布的点或是粒子来求解积分或是偏微分方程，因此也就不需要采用网格进行计算。而光滑粒子动力学（SPH）方法被认为是一种最早的粒子类方法，该方法最初被提出用于模拟三维开放空间的天体问题^[7]，而如今广泛应用于各类工程和科学问题中^[8]。因为不需要网格进行计算，SPH粒子的运动可以直接代表物质的变形或运动，SPH方法可以方便的处理大变形以及自由液面问题。因此它也在模拟流固耦合问题中有着很大的优势。

除了流体的运动，流固耦合问题往往还涉及结构的运动及变形。而拉格朗日型网格类方法如有限单元法（FEM）可以精确、稳定、高效地处理结构变形问题。为了利用SPH方法模拟自由液面流动以及FEM方法模拟结构变形的优势，很多学者将两种方法进行耦合进而模拟流固耦合问题^[9]，并取得了理想的结果。

尽管FEM-SPH的耦合方法可以有效的处理一些流固耦合问题，但也存在着许多缺陷。比如采用传统的FEM方法进行模拟时，经常会出现模拟结果“过刚”的问题，从而导致计算精度的缺失。因此刘等人^[10]基于梯度光滑技术提出了一种光滑有限元方法（SFEM）可以很好的解决传统有限元方法的模拟“过刚”问题。SPH方法也受限于其精度问题。传统的SPH方法只有一阶精度，它甚至不能准确的近似线性函数。为了提高SPH方法的精度并保持其效率及稳定性，张等^[11-12]提出了一种解耦有限粒子法（DFPM），可以精确的模拟各类不可压缩流动问题。因此将这两种方法耦合，有望可以有效的处理流固耦合问题。

本文的结构如下，第二章节将介绍光滑有限元与解耦有限粒子法，以及相关的耦合技术，第三章节给出结构入水以及溃坝冲击弹性板的算例来测试该耦合方法的精度，最后在第四章得出相关的结论。

2 SFEM-DFPM 耦合方法

2.1. 光滑有限元法

本文采用基于边的光滑有限元方法^[13]来模拟结构的运动及变形。在该方法中，结构在当前构型下的速度及空间位置由如下公式获得

$$\begin{cases} v^\alpha = N_I v_I^\alpha \\ x^\alpha = N_I x_I^\alpha \end{cases} \quad (1)$$

式中, v_I 和 x_I 分别代表节点 I 的速度和位置。 N_I 为型函数, “ α ” 是张量指标。接着将结构单元划分光滑域, 光滑域的速度梯度为

$$\bar{v}^{\alpha,\beta} = \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} v^\alpha n^\beta d\Gamma = \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} N_I v_I^\alpha n^\beta d\Gamma = \left(\frac{\partial N_I}{\partial x^\beta} \right) v_I^\alpha \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial N_I}{\partial x^\beta} \right) = \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} N_I n^\beta d\Gamma \quad (3)$$

“ β ” 为张量指标, A_k^s 是光滑域 Ω_k^s 的面积。 n^β 是基于光滑域边界 Γ_k^s 的单位正向量。因此, 根据虚功原理, 柯西应力可以由以下公式计算

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_I}{\partial x^\beta} \right) \bar{\sigma}^{\beta\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} N_I \rho b^\alpha d\Omega - \int_{\Gamma_I} N_I \bar{T}^\alpha d\Gamma + \int_{\Omega} N_I \rho N_J a_J^\alpha d\Omega = 0 \quad \forall I \notin \Gamma_v \quad (4)$$

δv , $\bar{\sigma}$, ρ , \bar{T} , a , 和 b 分别代表虚拟速度, 光滑柯西应力, 密度, 表面力, 加速度以及体积力。进而 SFEM 中计算结构变形的公式如下

$$\begin{cases} M_I a_I^\alpha + f_{I_int}^\alpha = f_{I_ext}^\alpha \\ f_{I_int}^\alpha = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_I}{\partial x^\beta} \right) \bar{\sigma}^{\beta\alpha} d\Omega \\ f_{I_ext}^\alpha = \int_{\Omega} N_I \rho b^\alpha d\Omega + \int_{\Gamma_I} N_I \bar{T}^\alpha d\Gamma \end{cases} \quad (5)$$

M_I 为节点 I 的质量。 f_{I_int} 和 f_{I_ext} 分别为等效内力和等效外力。

2.2. 解耦有限粒子法

解耦有限粒子法将初始的有限粒子法^[14]进行解耦。有限粒子法基于泰勒展开进行求解, 比如将一个核函数在其邻近空间位置 \mathbf{x}_i 进行泰勒展开可得

$$f(\mathbf{x}) = f_i + f_{i,\alpha} (x^\alpha - x_i^\alpha) + r((\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^2) \quad (6)$$

其中 $f_i = f(\mathbf{x}_i)$, $f_{i,\alpha} = (\partial f / \partial x^\alpha)_i$ 。将该公式两端同时乘以核函数及其空间导数可得

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\mathbf{x} = f_i \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\mathbf{x} + \nabla f_i \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\mathbf{x} \quad (7)$$

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\mathbf{x} = f_i \int_{\Omega} \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\mathbf{x} + \nabla f_i \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\mathbf{x} \quad (8)$$

Ω 为问题域, 并在下面的公式中不再标注。因此场变量及其导数可根据以下矩阵方程求得

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ \nabla f_i \end{Bmatrix} = \mathbf{L}^{-1} \begin{bmatrix} \int f(\mathbf{x})W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\ \int f(\mathbf{x})\nabla W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \int W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \, \mathrm{d}\mathbf{x} & \int (\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\ \int \nabla W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \, \mathrm{d}\mathbf{x} & \int (\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\nabla W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (10)$$

因为涉及到求解矩阵方程，该方法计算量大，稳定性差。而可逆矩阵又经常出现病态情况，导致计算的中断。由于可逆矩阵对角线元素主要影响计算结果，因此可以将以上矩阵方程解耦得到DFPM对场变量及其导数的求解

$$\begin{cases} f_i = \frac{\sum_{j=1}^N f_j W_{ij} \Delta V_j}{\sum_{j=1}^N W_{ij} \Delta V_j} \\ f_{i,x} = \frac{\sum_{j=1}^N (f_j - f_i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i} \Delta V_j}{\sum_{j=1}^N x_{ji} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i} \Delta V_j}, \quad f_{i,y} = \frac{\sum_{j=1}^N (f_j - f_i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial y_i} \Delta V_j}{\sum_{j=1}^N y_{ji} \frac{\partial W_{ij}}{\partial y_i} \Delta V_j}, \quad f_{i,z} = \frac{\sum_{j=1}^N (f_j - f_i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial z_i} \Delta V_j}{\sum_{j=1}^N z_{ji} \frac{\partial W_{ij}}{\partial z_i} \Delta V_j} \end{cases} \quad (11)$$

2.3. 单元粒子耦合算法

在处理流固耦合问题中，我们将虚粒子法^[10]与DFPM方法相结合，进而发展了高精度的单元粒子耦合算法^[16]。在该界面耦合准则中，我们将一个流体粒子的截断区域划分成不同的子区域，并在该子区域中生成虚拟粒子。子区域 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 分别对应着单元线段 AB, BC 和 CD ，如图 1 所示。该图中的 3 个子区域被分成小的三角形以及圆弧，每个三角形及圆弧的中心放置一个虚拟粒子。流体粒子 i 同结构单元的相互作用力即通过虚拟粒子求得。比如线段 BC 施加在流体粒子 i 上的作用力为

$$\mathbf{F}_{S_{BC}tF_i} = \sum_{j \in \Omega_{BCMN}} \mathbf{F}_{G_j t F_i} = m_i \left[- \sum_{j \in \Omega_{BCMN}} m_j \left(\frac{\rho_i}{\rho_i^2} + \frac{\rho_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij} + \sum_{j \in \Omega_{BCMN}} \frac{4m_j(\mu_i + \mu_j) \mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}}{(\rho_i + \rho_j)^2 (\mathbf{x}_{ij}^2 + \eta^2)} \mathbf{v}_{ij} \right] \quad (12)$$

$\mathbf{F}_{G_j t F_i}$ 为虚拟粒子 j 施加到流体粒子 i 上的作用力。因此，流体粒子 i 施加到线段 BC 上的边界力为 $\mathbf{F}_{F_i t S_{BC}} = -\mathbf{F}_{S_{BC} t F_i}$ 。为了获得更高阶的精度，我们将解耦有限粒子法同该虚拟粒子法相结合来同时获得流体粒子以及虚拟粒子的信息，具体见文献^[9,15]。

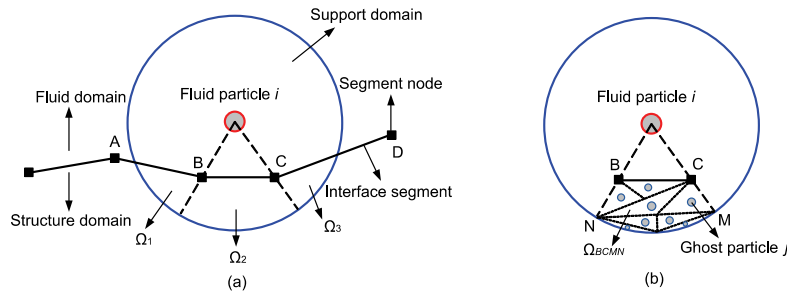


图 1 基于虚拟粒子的单元粒子耦合示意图

3 算例测试

在本章节我们测试了两个典型的流固耦合算例，第一个为楔形体入水，该问题涉及自由液面的运动、破碎以及流体与楔形结构的相互作用，但不含结构变形。该算例用来测试单元和粒子耦合方法的准确性。第二个算例为溃坝冲击弹性板，该问题涉及到流体作用下的结构变形，用以验证 SFEM-DFPM 耦合方法可以有效模拟带有结构变形的流固耦合问题。

3.1 楔形体入水

首先，我们测试了楔形体入水问题。在该算例中，楔形体以 6.15 m/s 的初始竖向速度进入水中。赵等人^[17]对该问题进行了实验研究，本文模拟使用的模型参数与实验设置相同。在模拟时水的密度取 1000 kg/m^3 ，重力加速度为 $g=9.81 \text{ m/s}^2$ ，时间步长为 $1.0 \mu\text{s}$ 。楔形结构采用光滑有限元模拟，流体运动采用解耦有限粒子法描述。同时在模拟中我们记录了楔形体侧面压力，与实验结果进行对比分析。

图 2 给出了楔形体入水过程中 4 个典型时刻下的压力分布图。从图中可以看出目前的耦合方法可以很好的模拟楔形体入水的过程，并且有效的重现自由液面的运动以及沿楔形侧面的射流情况。同时该方法还能得到非常光滑的压力分布。进一步我们定量地将目前的模拟结果同实验结果^[16]以及 Oger 等^[17]的模拟结果进行了对比，如图 3 所示。结果显示，对于楔形体的整体受力而言，目前的模拟结果同参考结果在楔形入水的前半段非常吻合，而在后半段与实验结果有一定误差。这是因为在入水后半段流体运动涉及自由液面破碎等强非线性特征，给数值模拟造成了一定困难。尽管如此，我们的模拟结果同参考的数值结果也是非常接近。而对于楔形表面的压力而言，目前的数值模拟结果同 Oger 等人^[17]的结果吻合较好，同时与实验结果在入水后半段有一定误差，原因同上。从该算例中，我们可以看到本文的耦合方法可以很好的模拟涉及自由液面的流体与结构相互作用问题。

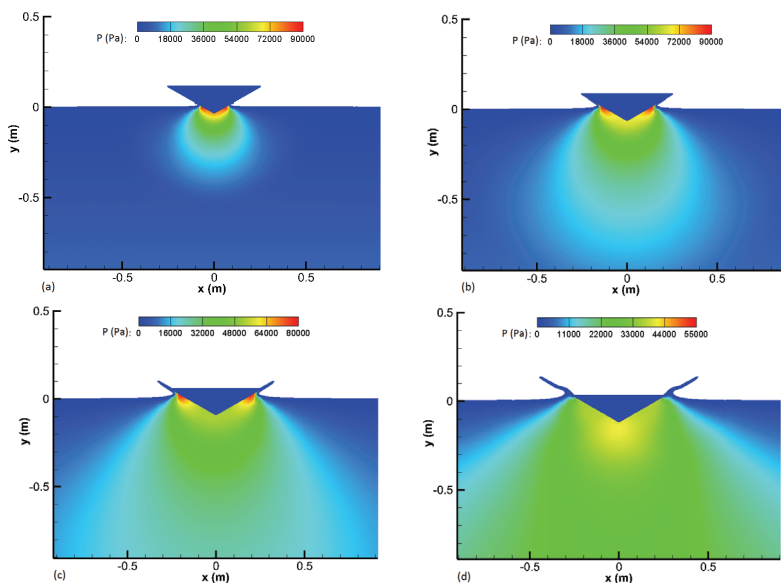


图 2 楔形体入水各时刻压力分布图，从(a)至(d)， $T=0.005\text{ s}, 0.01\text{ s}, 0.015\text{ s}, 0.02\text{ s}$

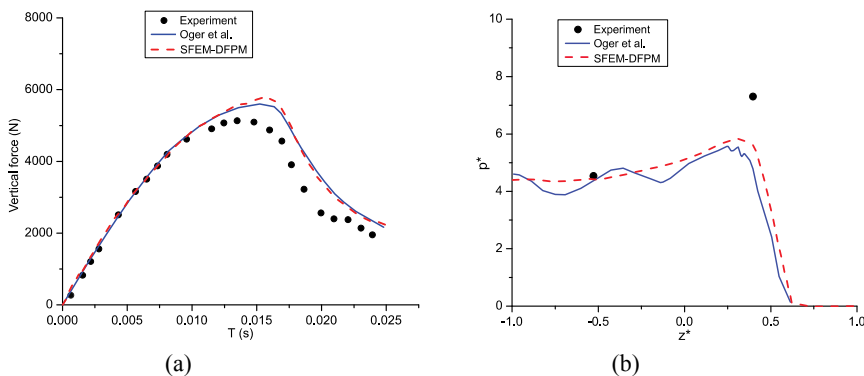


图 3 楔形体在竖直方向上的受力(a)， $T=0.00435\text{ s}$ 时楔形体侧面的压力分布(b)，参考数据为实验结果^[16]以及 Oger 等人^[17]的模拟结果

3.2 溃坝冲击弹性板

进一步我们测试了带有结构变形的流固耦合问题：溃坝冲击弹性板问题。在该问题中，容器内初始静止的水体在重力作用下运动，冲击容器底面固定的弹性板。该问题具体的参数设置见文献^[18]。弹性板的密度为 $\rho_s=2500\text{ kg/m}^3$ ，弹性模量为 $E=10^6\text{ Pa}$ ，泊松比为 $\nu=0$ 。我们采用 DFPM 模拟流体的运动，弹性板的变形以及容器的边界由 SFEM 进行模拟。

(a) $T=0.25\text{ s}$ (b) $T=0.5\text{ s}$

图 4 给出了两个典型时刻下溃坝流体中的压力分布以及弹性板中的应力分布。从该图中我们可以看到目前的耦合方法可以很好的模拟结构与流体相互作用的问题。有效的重现流体的运动及自由液面破碎的情况，也能很好的模拟结构的大变形。由于模拟采用了高精度的

网格类及粒子类方法的耦合，流体中的压力场以及结构中的应力场非常的光滑。我们进而定量地比较了弹性板顶端位移情况，如图 5 所示。目前采用耦合算法所计算的结果同文献中的参考结果非常接近。可见本文的耦合方法可以有效的模拟流体作用下的结构变形特征。

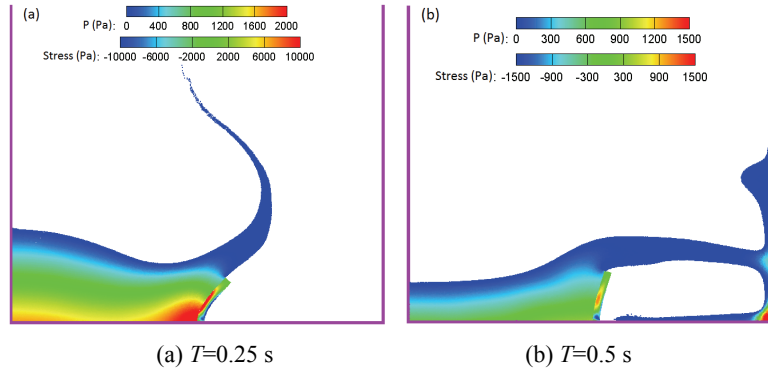


图 4 溃坝流体中的压力分布以及弹性板中的应力分布

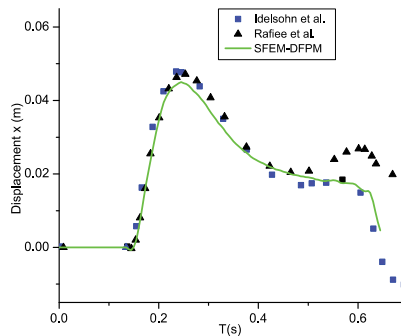


图 5 弹性板顶端位移

(参考数据为 Idelsohn 等^[18]以及 Rafiee 等^[19]的模拟结果)

4 结论

本文将解耦有限粒子法 (DFPM) 同光滑有限元方法 (SFEM) 耦合模拟流固耦合问题。DFPM 是一种高精度的 SPH 方法, SFEM 可以解决传统 FEM 方法求解“过刚”的问题。在本文的模拟中, 流体的运动采用粒子类方法 DFPM 模拟, 结构的运动及变形使用网格类方法 SFEM 模拟。我们采用虚粒子法同 DFPM 相结合的方式处理结构单元与流体粒子之间的信息交换, 该方法可以取得较高的精度。该方法随后被用于模拟两个典型的流固耦合问题, 即楔形体入水及溃坝冲击弹性板。数值模拟结果表明, 本文的耦合方法可以很好的模

拟流体的运动, 自由表面的变形及破碎等情况, 也可以有效的模拟结构的变形特征, 获得光滑的流场压力分布及结构应力分布。同时, 采用本文耦合方法的模拟结果与文献中的实验结果及其他参考的数值模拟结果较为吻合。可见本文中的 SFEM-DFPM 耦合方法可以有效处理带有自由液面的流固耦合问题。

参 考 文 献

- 1 Fadlun EA, Verzicco R, Orlandi P, Mohd-Yusof J. Combined Immersed-Boundary Finite-Difference Methods for Three-Dimensional Complex Flow Simulations. *J. Comput. Phys.*, 2000, 161(1): 35–60.
- 2 Cho JR, Lee HW. Numerical study on liquid sloshing in baffled tank by nonlinear finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2004, 193(23): 2581–2598.
- 3 Kim J, Kim D, Choi H. An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries. *J. Comput. Phys.*, 2001, 171(1): 132–150.
- 4 Hirt CW, Nichols BD. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.*, 1981, 39(1): 201–225.
- 5 Peng DP, Merriman B, Osher S, Zhao H, Kang M. A PDE-based fast local level set method. *J. Comput. Phys.*, 1999;155: 410–438.
- 6 Liu GR, Gu YT. *An introduction to meshfree methods and their programming*. Springer 2005.
- 7 Gingold RA, Monaghan JJ. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 1977, 181(3): 375–389.
- 8 Liu MB, Zhang ZL. Smoothed particle hydrodynamics (SPH) for modeling fluid-structure interactions. *Sci. China Phys. Mech. Astron.* 2019, 62: 984701.
- 9 Long T, Hu D, Wan D, Zhuang C, Yang G. An arbitrary boundary with ghost particles incorporated in coupled FEM-SPH model for FSI problems. *J. Comput. Phys.*, 2017, 350: 166–183.
- 10 Liu GR, Nguyen-Thoi T, Nguyen-Xuan H, Lam KY. A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions to solid mechanics problems. *Comput. Struct.*, 2009, 87(1): 14–26.
- 11 Zhang ZL, Walayat K, Chang JZ, Liu MB. Meshfree modeling of a fluid-particle two-phase flow with an improved SPH method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2018, 116: 530–569.
- 12 Zhang ZL, Liu MB. A decoupled finite particle method for modeling incompressible flows with free surfaces. *Appl. Math. Model.*, 2018, 60: 606–633.
- 13 He ZC, Liu GR, Zhong ZH, Wu SC, Zhang GY. An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for analyzing three-dimensional acoustic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2009, 199(1): 20–33.
- 14 Liu MB, Xie WP, Liu GR. Modeling incompressible flows using a finite particle method. *Appl. Math. Model.*, 2005, 29(12): 1252–1270.
- 15 Zhang ZL, Long T, Liu MB. Numerical simulation of violent liquid sloshing using an element-particle

- coupling strategy. *Coast. Eng.*, 2019: Submitted.
- 16 Zhao R, Faltinsen O. Water entry of two-dimensional bodies. *J. Fluid Mech.*, 1993, 246: 593–612.
- 17 Oger G, Doring M, Alessandrini B, Ferrant P. Two-dimensional SPH simulations of wedge water entries. *J. Comput. Phys.*, 2006;213(2): 803–822.
- 18 Idelsohn SR, Marti J, Limache A, Oñate E. Unified Lagrangian formulation for elastic solids and incompressible fluids: Application to fluid–structure interaction problems via the PFEM. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2008, 197(19): 1762–1776.
- 19 Rafiee A, Thiagarajan KP. An SPH projection method for simulating fluid-hypoelastic structure interaction. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2009, 198(33): 2785–2795.

An SFEM-DFPM coupling approach for modeling fluid-structure interactions

ZHANG Zhi-lang, LONG Ting, LIU Mou-bin*

(College of Engineering, Peking University, Beijing, 100871.

*Email: mbliu@pku.edu.cn)

Abstract: Fluid-structure interactions (FSI) involve the motion, deformation and destruction of solid structures as well as their influences on flow field. This problem widely exists in many natural phenomena and engineering applications. The nonlinearity and time-dependent nature inherent in FSI together with possible large deformations and moving interfaces present great challenges to develop numerical models with conventional grid-based methods. The decoupled finite particle method (DFPM) is an improved smoothed particle hydrodynamics (SPH) method with a better accuracy, and it can conveniently treat large deformations and naturally capture the rapidly moving interfaces and free surfaces. The smoothed finite element method (SFEM) can solve the “overly-stiff” problem in conventional FEM and thus obtains more reasonable structural deformations. Therefore, the coupling of DFPM with SFEM provides an alternative approach for modeling FSI problems. In this paper, we introduced the coupling method and conducted different numerical examples. The simulation results demonstrated that the SFEM-DFPM can effectively treat various FSI problems with free surfaces.

Key words: Smoothed finite element method (SFEM); decoupled finite particle method (DFPM); fluid-structure interactions; free surfaces.