

# 椭圆余弦波作用下浮体运动响应的 数值研究

刘勇男<sup>1</sup>, 张俊生<sup>1</sup>, 滕斌<sup>2</sup>, 陈昌平<sup>1</sup>

- (1. 大连海洋大学 海洋与土木工程学院, 大连, 116023, Email: [zhangjunsheng@dlo.edu.cn](mailto:zhangjunsheng@dlo.edu.cn))  
(2. 大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 大连, 116024, Email: [bteng@dlut.edu.cn](mailto:bteng@dlut.edu.cn))

**摘要:** 对于近岸、港口工程而言, 椭圆余弦波对浮体的作用是关键问题之一。在水深的影响下, 椭圆余弦波形成了波谷宽而平、波峰窄而尖的形态, 其非线性与波陡完全无关。传统上依靠 Stokes 理论对波浪与浮体作用的研究于该问题并无有效意义。因此, 需要对椭圆余弦波对浮体的作用进行单独的研究。本研究利用改进型 Boussinesq 方程建立了用于计算浅水波浪作用下浮体运动响应的全时域数值模型, 并利用该模型对椭圆余弦波作用下漂浮方箱的运动响应进行了研究。发现不同非线性的椭圆余弦波引起的方箱运动响应规律相差很大, 揭示了椭圆余弦波非线性影响的特性及与深水波情况的明显差异。

**关键词:** 椭圆余弦波; 浮体; 运动响应; Boussinesq 方程

## 1 引言

浮体在波浪作用下的运动响应是海洋工程的核心问题之一, 得到广泛的关注和研究。但以往的研究集中于深水 and 有限水深波浪的作用, 对浅水波浪作用下浮体的运动影响研究甚少。作为浅水规则波的椭圆余弦波有着独特的特征形态, 与深水及有限水深波不同, 不能适用常用的 Stokes 理论进行计算和分析, 而利用完全非线性方法, 对于需要考虑地形及水体边界影响的近岸水域来说, 也存在着计算效率和稳定性的问题。因此, 利用 Boussinesq 方程构建浮体运动响应模型成为一个研究浅水波浪与浮体作用的有效方法。

Bingham<sup>[1]</sup>、Pinkster 等<sup>[2]</sup>、Wenneker 等<sup>[3]</sup>、Pinheiro 等<sup>[4]</sup>均利用 Boussinesq 方程建立了浅水波浪作用下浮体运动响应的计算模型。但是, 都采用了 Cummins 方法, 利用频域到时域的转换进行运动方程时域的求解。因此, 需要计算附加质量、迟滞函数和卷积积分。利

基金资助: 国家自然科学基金面上项目 (51879039); 海岸和近海工程国家重点实验室开放基金项目 (LP1826)

用建立的模型，以上学者对不规则波作用下的浮体运动进行了计算，但对计算准确性要求更高的规则波的作用，并没有进行计算、分析。

张俊生等<sup>[5]</sup>建立了直接时域求解浅水波浪作用下浮体运动响应的 Boussinesq 型方程模型。该模型以 Boussinesq 方程为基础，模拟入射波浪，用 Laplace 方程计算线性化处理的散射波，并通过时间积分直接进行运动方程的时域求解。同时，模型采用了完全非线性的造波方法和坐标变换的曲边界处理技术，从而使计算效率和准确性获得了保障。

## 2 浅水波浪与浮体作用的全时域模型

入射波浪的模拟采用 Beji 和 Nadaoka<sup>[6]</sup>的改进型方程：

$$\frac{\partial \eta_I}{\partial t} + \nabla_2 \cdot [(d + \eta_I) \bar{\mathbf{u}}_I] = 0 \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_I}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}}_I \cdot \nabla_2) \bar{\mathbf{u}}_I + g \nabla_2 \eta_I = (1 + \beta) \frac{d}{2} \nabla_2 \left[ \nabla_2 \cdot \left( d \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_I}{\partial t} \right) \right] \\ + \beta \frac{gd}{2} \nabla_2 [\nabla_2 \cdot (d \nabla_2 \eta_I)] - (1 + \beta) \frac{d^2}{6} \nabla_2 \left( \nabla_2 \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_I}{\partial t} \right) - \beta \frac{gd^2}{6} \nabla_2 (\nabla_2^2 \eta_I) \end{aligned} \quad (1b)$$

其中， $\nabla_2 = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  为二维梯度算子，以区别散射波计算中的三维梯度算子， $\bar{\mathbf{u}}_I$ 、 $\eta_I$  分别为入射波浪的水深平均水平速度和波高。

在垂向上，入射波浪场中各点速度和压强依下列式子进行计算：

$$u_I = \bar{u}_I + \left( \frac{d^2}{6} - \frac{z^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_I}{\partial x \partial y} \right) - \left( \frac{d}{2} + z \right) \left( \frac{\partial^2 (d\bar{u}_I)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (d\bar{v}_I)}{\partial x \partial y} \right) \quad (2a)$$

$$v_I = \bar{v}_I + \left( \frac{d^2}{6} - \frac{z^2}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_I}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{v}_I}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{d}{2} + z \right) \left( \frac{\partial^2 (d\bar{u}_I)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (d\bar{v}_I)}{\partial y^2} \right) \quad (2b)$$

$$w_I = - \left( \frac{\partial (d\bar{u}_I)}{\partial x} + \frac{\partial (d\bar{v}_I)}{\partial y} \right) - z \left( \frac{\partial \bar{u}_I}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_I}{\partial y} \right) \quad (2c)$$

$$p_I = -\rho g \eta_I + \rho \left[ z \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial (d\bar{u}_I)}{\partial x} + \frac{\partial (d\bar{v}_I)}{\partial y} \right) + \frac{z^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \bar{u}_I}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_I}{\partial y} \right) \right] \quad (2d)$$

散射波浪（包括绕射波和辐射波）由 Laplace 方程计算：

$$\nabla^2 \phi_s = 0 \quad (3)$$

其中,  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  为三维梯度算子,  $\phi_s$  为散射势。

数值计算时, 入射波采用有限元方法, 散射波采用边界元方法。入射波和散射波的计算通过浮体的物面边界条件进行衔接。散射波的计算只需要在浮体周期一定范围内进行即可, 通过布置阻尼层, 吸收散射波, 即认为散射波传播至远处已耗尽能量, 不足以再反射回来。如果浮体近处有岸壁, 通过 Rankine 源及其镜像的格林函数进行处理, 便可简化计算。入射边界条件采用 Fenton<sup>[7]</sup> 的完全非线性稳态波理论进行计算, 并在全反射边界上进行坐标变换, 以保证曲边界上计算的准确性。时间积分采用 Adams-Bashforth-Moulton 预报-校正方法。

浮体的运动方程形式为:

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\zeta}}(t) + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) + \mathbf{C}\boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t) \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  分别为浮体运动质量阵、黏性阻尼系数阵、恢复力矩阵;  $\mathbf{F}(t)$  为六个分量的广义波浪激振力, 包括入射波和散射波的共同作用;  $\boldsymbol{\zeta}(t)$  为广义位移;  $\mathbf{G}(t)$  为系泊系统等其它外部作用力和力矩。当进行理论模型计算时, 可在式中加入刚度阵  $\mathbf{K}\boldsymbol{\zeta}(t)$  项代替系泊系统。波浪激振力  $\mathbf{F}$  按下式计算:

$$\mathbf{F} = \iint_{\Omega_b} \left\{ \rho g \eta_t + \rho \left[ z \frac{\partial}{\partial t} \nabla_2 \cdot (d\bar{\mathbf{u}}_t) + \frac{z^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_2 \cdot \bar{\mathbf{u}}_t \right] - \rho \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right\} \mathbf{N} ds \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{N}$  为物面广义单位法向量,  $\Omega_b$  为浮体的平均湿表面。

该模型的计算准确性已被张俊生等<sup>[5]</sup> 通过各方面算例进行了验证。

### 3 椭圆余弦波作用下浮体的运动响应

如图 1 所示, 测试水深为  $d = 0.8 \text{ m}$ , 测试浮体为边长  $B = 0.6 \text{ m}$  的方箱, 吃水  $d_r = 0.3 \text{ m}$ 。入射波浪周期  $T$  为 8 s, 改变波高  $H$ , 具体五列测试波浪的参数如表 1 所示。

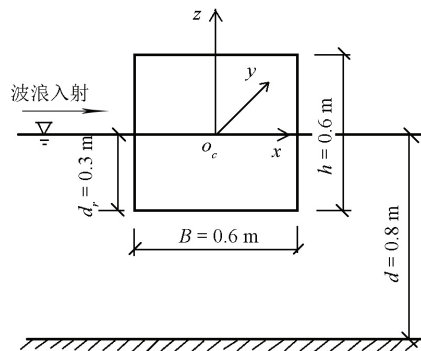


图 1 测试时相关尺寸

表 1 测试波浪参数

波高 $H$ (m)	相对波高 $H/d$	周期 $T$ (s)	波长 $L$ (m)	Ursell 数 $U_r$
0.008	0.01		22.218	0.195
0.04	0.05		22.356	0.989
0.08	0.1	8	22.649	2.03
0.12	0.15		22.998	3.14
0.184	0.23		23.598	5.07

该 5 列测试波浪呈现出不同的非线性,  $H/d = 0.01$  时, 波浪可以被看成线性波浪, 随着波高的增加, 波浪非线性不断增强, 呈现出典型的椭圆余弦波特征。所有测试波浪的规范化波形如图 2 所示。测试中, 加入刚度阵  $\mathbf{K}$  和阻尼阵  $\mathbf{B}$ , 二者数值上取值相同, 对角线的 6 个元素分别取 1000、1000、0、200、200、200, 其余元素均取 0。

浮箱所受波浪作用力和位移如图 3 所示。沿  $y$  轴的平移和绕  $x$ 、 $z$  轴的转动均为 0, 故图 3 只呈现 3 个维度上的波浪力和位移。可以明显地看到, 在波高增加、椭圆余弦波特征越明显的情况下, 浮体的运动响应规律越呈现出极强的非线性, 且与深水、有限水深波浪作用的情况存在着明显的差异。

当  $H/d = 0.01$  时, 波浪近乎于线性波浪, 波浪力和运动响应均接近于线性作用效果。当波高增加、波浪非线性增强时, 波浪力  $F_1$ 、 $F_3$  的峰值对应时刻更接近于波峰到来的时刻, 即二者的相位差更小, 相应地, 其峰值也越大; 而波谷作用时二者近乎于 0 的时间也越长。对应地, 波浪非线性越强,  $\xi_1$ 、 $\xi_5$  位移最大值也在越接近波峰作用的时刻出现, 其无量纲幅值也越大。例如,  $H/d = 0.23$  时,  $\xi_1$ 、 $\xi_5$  对应的最大幅值比  $H/d = 0.01$  时分别高出 70% 和 60%。此外, 当波谷作用时, 该两个方向的位移均有一段时间处于几乎静止的状态, 直到波峰即将到来时, 产生急剧变化的运动响应。

对于垂荡  $\xi_3$  而言, 椭圆余弦波的作用更具特殊性。由图 3 可以看到, 椭圆余弦波非线性越强, 波谷越宽越平坦, 越能引起浮体在波谷面上的自由振荡, 并逐渐衰减。这个现象显然与椭圆余弦波显著的非线性形态相关。可以利用式 (6) 对自由振动的频率进行估算

$$\omega_{b3}^2 = \frac{c_{33}}{m_b + a_{33}} \quad (6)$$

其中,  $m_b$  为浮箱质量 (110.5kg),  $c_{33}$  为恢复力系数之一 (3611.7N/m),  $a_{33}$  为  $z$  方向上的附加质量, 且为振荡频率的函数, 因此, 可迭代求解得  $\omega_{b3} = 4.56$  rad/s, 即自振周期约为 1.38s (方箱运动周期的 1/6), 与图 3 显示的结果基本相同, 这也证明了所建模型计算正确。此外, 在最大运动幅值上,  $H/d = 0.23$  时比  $H/d = 0.01$  时高出了超过 80%, 同样显现出椭圆余弦波非线性的显著影响。

综上, 完全展现了椭圆余弦波作用下波浪非线性对浮体运动响应的显著影响, 揭示了与 Stokes 波作用情况的明显差异。

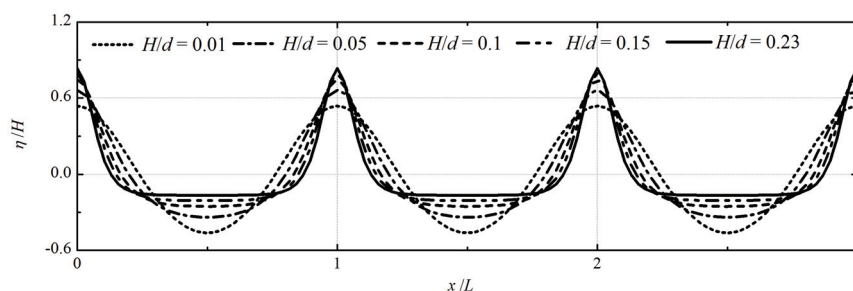


图2 测试波浪的规范化波形

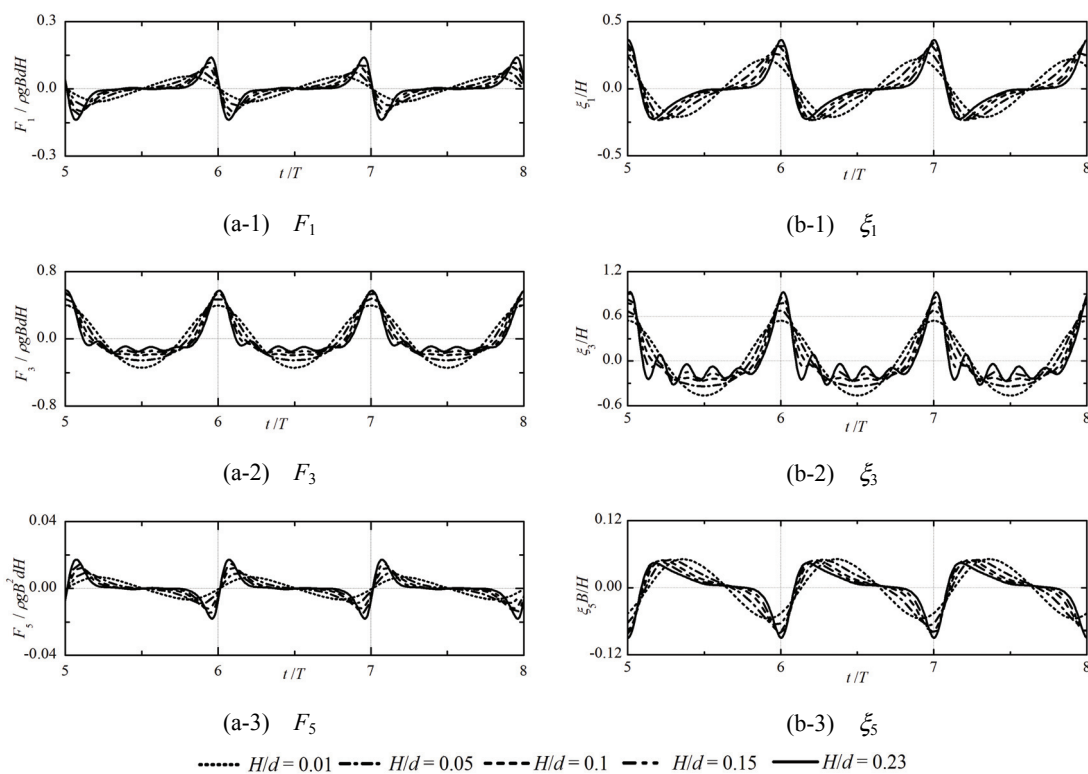


图3 测试方箱所受波浪力及其运动响应

## 参 考 文 献

- 1 Bingham H B. A hybrid Boussinesq-panel method for predicting the motion of a moored ship . Coastal Eng.,

- 2000, 40: 21-38.
- 2 Pinkster J A, Naaijen P. Predicting the effect of passing ships . Proc. 18th IWWWFB, 2003.
  - 3 Wenneker I, Borsboom M J A, Pinkster J A, et al. A Boussinesq-type wave model coupled to a diffraction model to simulate wave-induced ship motion . Proc. 31st PIANG Congr., 2006.
  - 4 Pinheiro L, Fortes C, Santos J, et al. Coupling of a Boussinesq wave model with a moored ship behavior model . Proc. 33rd Conf. Coastal Eng., 2012.
  - 5 张俊生, 滕斌, 丛培文. 浅水中浮体在波浪作用下运动的三维时域计算模型. 海洋工程, 2016, 34(1): 1-9.
  - 6 Beji S, Nadaoka K. A formal derivation and numerical modeling of the improved Boussinesq equations for varying depth . Ocean Eng., 1996, 23: 691-704.
  - 7 Fenton J D. The numerical solution of steady water wave problems . Comput. & Geosci., 1988, 14(3): 357-368.

## **A numerical study of the motion response of a float body induced by cnoidal waves**

LIU Yong-nan<sup>1</sup>, ZHANG Jun-sheng<sup>1</sup>, TENG Bin<sup>2</sup>, CHEN Chang-ping<sup>1</sup>

(1. Ocean and Civil Engineering School, Dalian Ocean University, Dalian, 116023,

Email: [zhangjunsheng@dlo.u.edu.cn](mailto:zhangjunsheng@dlo.u.edu.cn)

2. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, 116024,

Email: [bteng@dlut.edu.cn](mailto:bteng@dlut.edu.cn))

**Abstract:** For offshore and port engineering, the effect of cnoidal waves on floating bodies is an important problem. Owing to the influence of water depth, cnoidal waves have a specific shape, a wide and flat trough and a narrow and steep peak. The nonlinearity is completely independent of the wave steepness. Therefore, the Stokes theory is no effective for the problems of the interaction of cnoidal waves and the float body, and a numerical model is needed. In this paper, such a model, which is a 3D full time-domain one, was set up and used to simulate the motion response of a float body induced by cnoidal waves. The results showed that there was a significant difference between the responses induced by cnoidal waves and deep or finite depth water waves. Certainly, noticeable differences between cnoidal waves with different nonlinearity can also be presented.

**Key words:** Cnoidal wave; Float body; Motion response; Boussinesq equation.